Licence Sciences de la vie
Probabilités et statistiques

Corrigé de l'examen du 4 septembre 2006

Exercice 1. 1. On note A l'évènement *l'individu répond qu'il est en faveur de ce mouvement politique*, et F l'évènement *l'individu est en faveur de ce mouvement politique*. La probabilité demandée est $P(A)$ et est donnée par

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \text{ et } F) + P(A \text{ et } nonF) \\ &= P(A \mid F)P(F) + P(A \mid nonF)P(nonF) \\ &= 0,9 \times 0,3 + 0,1 \times 0,7 \;=\; 0,34. \end{aligned}$$

2. La probabilité demandée est $P(F \mid A)$, on applique la formule de Bayes:

$$\begin{aligned} P(F \mid A) &= \frac{P(A \mid F)P(F)}{P(A \mid F)P(F) + P(A \mid nonF)P(nonF)} \\ &= \frac{P(A \mid F)P(F)}{P(A)} \;=\; \frac{0,9 \times 0,3}{0,34} \;=\; \frac{27}{34} \;\simeq\; 0,79. \end{aligned}$$

Exercice 2.
1. La loi conjointe de X et Y est donnée par

X \ Y	0	1	2	3	*loi de* X
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
1	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$
2	0	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$
loi de Y	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	

2. Les lois marginales de X et Y se lisent ci-dessus. Les calculs des espérances de X et Y donnent

$$E(X) = \frac{5}{7}, \quad V(X) = \frac{24}{49}, \quad E(Y) = \frac{10}{7}, \quad V(Y) = \frac{40}{49}.$$

3. Les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes puisque

$$P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = 0 \neq \frac{3}{49} = P(X = 1) \times P(Y = 0).$$

4. L'espérance de Z est $E(Z) = E(X) + E(Y) = \frac{15}{7}$ et la variance est

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y) = \frac{64}{49} + 2 \times \frac{20}{49} = \frac{104}{49}.$$

5. On a $P(Y = 1|X = 1) = \dfrac{P(Y = 1 \text{ et } X = 1)}{P(X = 1)} = \dfrac{3/14}{3/7} = \dfrac{1}{2}$. De plus, quand $X = 1$ alors $Z = 2$ est équivalent à $Y = 1$, donc

$$P(Z = 2|X = 1) = P(Y = 1|X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

1. Les distributions marginales de X et Y sont données par

Y X	52 kg	60 kg	68 kg	
165 cm	14	6	3	23
170 cm	3	8	4	15
175 cm	0	5	7	12
	17	19	14	50

2. La moyenne de X est $\overline{X} = 168,9 \simeq 169\,cm$, sa variance est $V(X) = 16,29 \simeq 16$.
La moyenne de Y est $\overline{Y} = 59,52 \simeq 60\,kg$, sa variance est $V(Y) = 39,4496 \simeq 39$.
3. L'équation de la droite d'ajustement de Y par rapport à X est

$$Y \;\simeq\; 0,85 \times X - 84,3.$$

(des erreurs d'arrondis sur les moyennes de X et Y peuvent amener à des résultats légèrement différents, comptés comme justes)
4. Le calcul du χ^2 donne $\chi^2 \simeq 872$, or avec 4 degrés de liberté on sait que $P(\chi^2 \geq 10,8) = 2,9\%$, donc on doit rejeter l'hypothèse.

Exercice 4.

1. La variable aléatoire X suit la loi binômiale de paramètres $n = 547$ et $p = 0,01$.
2. L'espérance de X est $E(X) = np = 5,47$ etsa variance est $V(X) = np(1-p) \simeq 5,4$.
3. On doit calculer $P(X \geq 4)$, il suffit pour cela d'écrire

$$P(X \geq 4) \;=\; 1 - P(X \leq 3) \;=\; 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)).$$

Pour mener le calcul, on applique soit la formule

$$P(X = k) \;=\; C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} = C_{547}^k\, 0,01^k\, 0,99^{547-k}$$

soit l'approximation de Poisson

$$P(X = k) \;\simeq\; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{5,47^k}{k!} e^{-5,47}$$

où $\lambda = np = 4,53$. Dans les deux cas on trouve $P(X \geq 4) \simeq 0,8$.