Licence Sciences de la vie
Probabilités et statistiques

Corrigé de l'examen du 19 juin 2007

Exercice 1.
1. Les distributions marginales de X et Y sont données par

Y / X	$12\,°C$	$13\,°C$	$14\,°C$	$15\,°C$	*distribution de X*
$0\,°C$	0	0	1	1	2
$3\,°C$	0	1	0	3	4
$4\,°C$	2	0	1	2	5
$5\,°C$	1	1	0	3	5
distribution de Y	3	2	2	9	

2. La moyenne de X est $\overline{X} = \frac{57}{16} \simeq 3,6\,°C$, sa variance est $V(X) = \frac{607}{256} \simeq 2,4$.

La moyenne de X est la température moyenne observée au mois de février durant les années 1963 à 1978.

La moyenne de Y est $\overline{Y} = \frac{225}{16} \simeq 14°C$, sa variance est $V(Y) = \frac{367}{256} \simeq 1,4$.

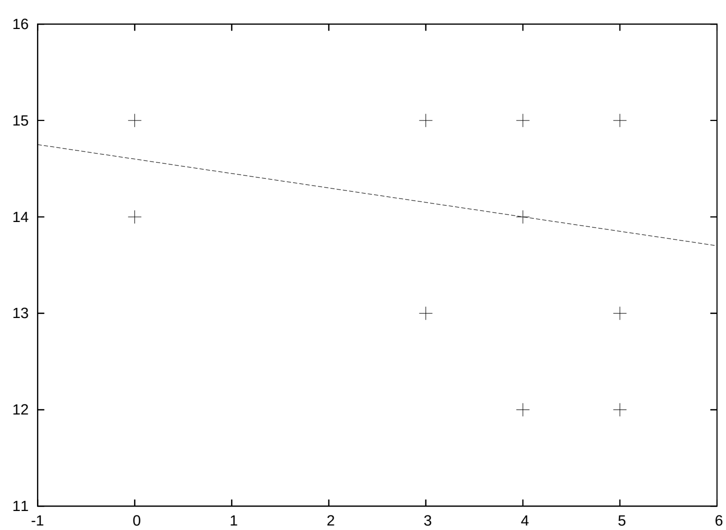
3. La covariance de X et Y est $-\frac{89}{256} \simeq -0,35$. L'équation de la droite d'ajustement de Y par rapport à X est

$$Y \;\simeq\; -0,15 \times X + 14,6.$$

Le coefficient de corrélation de X et Y est à peu près $-0,19$.

(des erreurs d'arrondis sur les moyennes de X et Y peuvent amener à des résultats légèrement différents, comptés comme justes)

4. On obtient le graphique suivant:



Exercice 2.

1. La loi conjointe de X et Y est donnée par

X / Y	1	2	3	4	5	6	*loi de* Y
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
loi de X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

2. La loi marginale de X est donnée ci-dessus, et on a

$$E(X) \;=\; \frac{7}{2} \quad et \quad V(X) \;=\; \frac{35}{12}.$$

3. Les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes puisque

$$P(X=1 \; et \; Y=1) \;=\; 0 \;\neq\; \frac{1}{12} \;=\; P(X=1)\times P(Y=1).$$

4. L'espérance de Z est $E(Z) = E(X) + E(Y) = 4$ et la variance est

$$V(Z) \;=\; V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y) \;=\; \frac{35}{12} + \frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} \;=\; \frac{11}{3} \;\simeq\; 3,7.$$

5. On a $P(Y=1|X=1) \;=\; \dfrac{P(Y=1 \; et \; X=1)}{P(X=1)} \;=\; \dfrac{0}{1/6} \;=\; 0.$

L'évènement $(Z=5)$ peut aussi s'écrire

$$(Z=5) \;=\; (\text{“}X=4 \; et \; Y=1'' \; ou \; \text{“}X=5 \; et \; Y=0'')$$

d'où $P(Z=5) = P(X=4 \; et \; Y=1) + P(X=5 \; et \; Y=0) = \dfrac{1}{3}$. On obtient donc

$$P(Y=1|Z=5) \;=\; \frac{P(Y=1 \; et \; Z=5)}{P(Z=5)} \;=\; \frac{P(Y=1 \; et \; X=4)}{P(Z=5)} \;=\; \frac{1/6}{1/3} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

1. La variable aléatoire X égale au nombre de nasses vides relevées suit la loi binômiale de paramètres $n=25$ et $p=0,15$. Par conséquent, l'espérance de X est $E(X) = np \simeq 3,8$ et sa variance est $V(X) = np(1-p) \simeq 3,2$.

2. Puisque X suit la loi binômiale de paramètres $n=25$ et $p=0,15$, on applique la formule du cours pour trouver

$$P(X=3) \;=\; \binom{25}{3}\, 0,15^3\,(1-0,15)^{25-3} \;=\; \frac{25\times 24\times 23}{3\times 2}\, 0,15^3\, 0,85^{22} \;\simeq\; 0,2.$$

Exercice 4.

1. On note *oui* l'évènement *“obtenir la réponse oui au questionnaire”*, et *pile* l'évènement *“obtenir pile au premier lancer de la pièce”*. La formule des probabilités totales donne alors

$$P(oui) \;=\; P(oui\,|\,pile)P(pile) \;+\; P(oui\,|\,\overline{pile})P(\overline{pile})$$

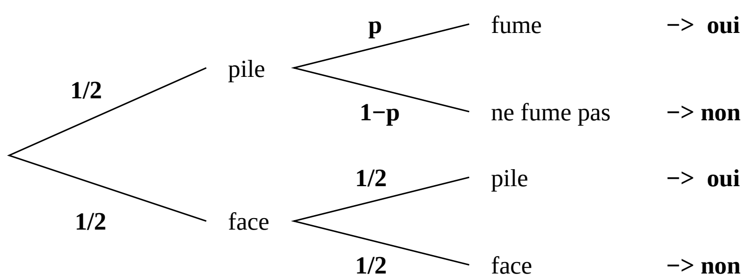
Il reste à remarquer que $P(oui\,|\,pile) = p$ (si la pièce tombe sur pile au premier lancer, la probabilité d'obtenir la réponse *oui* correspond à la proportion des fumeurs), $P(pile) = P(\overline{pile}) = \frac{1}{2}$ (les évènements *pile* et $\overline{pile}$, sont équiprobables) et $P(oui\,|\,\overline{pile}) = \frac{1}{2}$ car c'est la probabilité d'obtenir pile lorsqu'on lance la pièce la deuxième fois.

On en conclut la formule:

$$P(oui) \;=\; \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}.$$

2. Puisque $P(oui) = 40\%$, on obtient d'après la formule que $p = 0,3$.

Remarque: pour obtenir la formule de la question précédente, on peut aussi raisonner grâce à l'arbre suivant:



sur lequel on peut également lire que $P(oui) \;=\; \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.