Licence Sciences de la vie
Probabilités et statistiques

Corrigé de l'examen du 22 juin 2006

Exercice 1. On note M l'évènement "tomber malade" et V l'évènement "être vacciné". Les données de l'énoncé sont: $P(M) = \frac{9}{10}$, $P(M|\overline{V}) = 1$ et $P(M|V) = \frac{2}{3}$.
1. Le couple $(V, \overline{V})$ (où $\overline{V}$ est l'évènement contraire de V) forme une partition de l'univers des évènements élémentaires et on a donc

$$P(M) \;=\; P(M|V) \times P(V) + P(M|\overline{V}) \times P(\overline{V}).$$

Comme $P(\overline{V}) = 1 - P(V)$ on trouve donc $\dfrac{9}{10} = \dfrac{2}{3} \times P(V) + 1 \times (1 - P(V))$ d'où $P(V) = 0,3$.
2. Par définition on a

$$P(V|M) \;=\; \frac{P(M|V) \times P(V)}{P(M)} \;=\; \frac{\frac{2}{3} \times 0,3}{\frac{9}{10}} \;=\; \frac{2}{9}.$$

Exercice 2.
1. La loi conjointe de X et Y est donnée par

X \ Y	0	1	2	*loi de X*
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{6}$
loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

2. Les lois marginales de X et Y se lisent ci-dessus. Puisque X et Y ont même loi, elles ont même espérance et variance, on et a

$$E(X) \;=\; \frac{5}{6} \quad et \quad V(X) \;=\; \frac{17}{36}.$$

3. Les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes puisque

$$P(X = 2 \; et \; Y = 2) \;=\; 0 \;\neq\; \frac{1}{36} \;=\; P(X = 2) \times P(Y = 2).$$

4. L'espérance de Z est $E(Z) = E(X) + E(Y) = \frac{5}{3}$ et la variance est

$$V(Z) \;=\; V(X) + V(Y) + 2\,cov(X, Y) \;=\; \frac{17}{18} + 2 \times \left(-\frac{17}{180}\right) \;=\; \frac{34}{45}.$$

5. On a $P(Y = 0|X = 1) \;=\; \dfrac{P(Y = 0 \; et \; X = 1)}{P(X = 1)} \;=\; \dfrac{1/5}{1/2} \;=\; \dfrac{2}{5}$. De plus, quand $X = 1$ alors $Z = 2$ est équivalent à $Y = 1$, donc

$$P(Z = 2|X = 1) \;=\; P(Y = 1|X = 1) \;=\; \frac{P(Y = 1 \; et \; X = 1)}{P(X = 1)} \;=\; \frac{1/5}{1/2} \;=\; \frac{2}{5}.$$

Exercice 3.
1. Les distributions marginales de X et Y sont données par

X \ Y	52 kg	60 kg	68 kg	
165 cm	16	8	1	25
170 cm	1	10	4	15
175 cm	0	4	8	12
	17	22	13	52

2. La moyenne de X est $\overline{X} \simeq 169\,cm$, sa variance est $V(X) \simeq 16$. La moyenne de Y est $\overline{Y} \simeq 59\,kg$, sa variance est $V(Y) \simeq 37$.
3. L'équation de la droite d'ajustement de Y par rapport à X est

$$Y \simeq 1,04 \times X - 117.$$

(des erreurs d'arrondis sur les moyennes de X et Y peuvent amener à des résultats légèrement différents, comptés comme justes)
4. Le calcul du χ^2 donne $\chi^2 \simeq 30$, or avec 4 degrés de liberté on sait que $P(\chi^2 \geq 10,8) = 2,9\%$, donc on doit rejeter l'hypothèse.

Exercice 4.
1. La variable aléatoire X suit la loi binômiale de paramètres $n = 453$ et $p = 0,01$.
2. L'espérance de X est $E(X) = np = 4,53$ etsa variance est $V(X) = np(1-p) \simeq 4,48$.
3. On doit calculer $P(X \geq 4)$, il suffit pour cela d'écrire

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)).$$

Pour mener le calcul, on applique soit la formule

$$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} = C_{453}^k\, 0,01^k\, 0,99^{453-k}$$

soit l'approximation de Poisson

$$P(X = k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{4,53^k}{k!} e^{-4,53}$$

où $\lambda = np = 4,53$. Dans les deux cas on trouve $P(X \geq 4) \simeq 0,66$.