**DEUG Sciences de la vie**
**2ème année**
**Module M46**

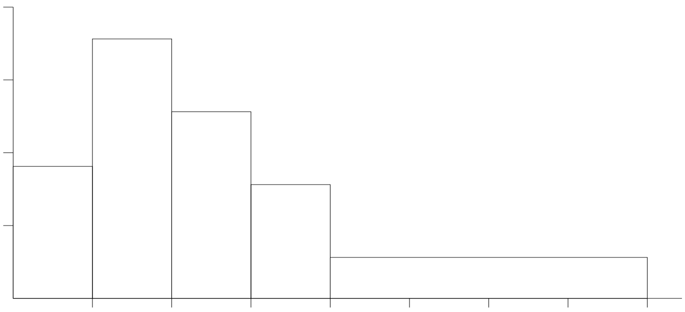
## Corrigé de l'examen du 22 juin 2004

### Exercice 1

On regroupe dans le tableau suivant les données qui permettent de mener les différents calculs:

| classes | centres | effectifs (en milliers) | densités (en milliers) | fréquences cumulées croissantes |
|---|---|---|---|---|
| ]0,5] | 2,5 | 9 | $\frac{9}{5} = 1,8$ | de 0 à $\frac{9}{60} = 0,15$ |
| ]5,10] | 7,5 | 18 | $\frac{18}{5} = 3,6$ | de $0,15$ à $\frac{27}{60} = 0,45$ |
| ]10,15] | 12,5 | 13 | $\frac{13}{5} = 2,6$ | de $0,45$ à $\frac{40}{60} \simeq 0,67$ |
| ]15,20] | 17,5 | 8 | $\frac{8}{5} = 1,6$ | de $0,67$ à $\frac{48}{60} = 0,8$ |
| ]20,40] | 30 | 12 | $\frac{12}{20} = 0,6$ | de $0,8$ à $\frac{60}{60} = 1$ |

1. On obtient l'histogramme:



2. La moyenne de cette distribution est $\frac{41}{3} \simeq 13,7$.
La variance vaut environ $85,7$, l'écart-type est donc $9,3$.

3. Le mode est la classe $]5,10]$.
La médiane $Me$ se trouve dans l'intervalle ]10,15] et est donnée par

$$Me \ = \ 10 + \frac{0,5 - \frac{27}{60}}{\frac{40}{60} - \frac{27}{60}}(15 - 10) \ = \ 10 + \frac{15}{13} \simeq 11,15.$$

### Exercice 2

1. On modélise cette expérience aléatoire de la façon suivante: on considère que tous les jetons sont discernables (on décide de différencier les 3 jetons "1" et les 2 jetons "2"), et comme le tirage est *sans remise*, l'univers des évènements élémentaires compte $6 \times 5 = 30$ éléments. On obtient la loi conjointe:

| $X \setminus Y$ | 0 | 1 | 2 | *loi de* $X$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ | $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ | $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ |
| 1 | $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ | $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ | $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ | $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ | $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ | $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ | $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ |
| *loi de* $Y$ | $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ | $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ | $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ | |

2. Les lois marginales de $X$ et $Y$ sont données dans le tableau de la question précédente.
L'espérance de $X$ est $\frac{7}{6} \simeq 1,17$, sa variance est $\frac{17}{36} \simeq 0,47$. Les résultats sont les mêmes pour $Y$ puisque $X$ et $Y$ ont même loi.

3. Les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes puisque
$$P(X=0 \text{ et } Y=0) \;=\; 0 \;\neq\; \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = P(X=0)\times P(Y=0).$$

4. L'espérance de $Z$ est $E(Z)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{3}\simeq 2,33$.
La covariance de $X$ et $Y$ est $-\frac{17}{180}\simeq -0,094$, donc la variance de $Z$ est $V(Z)=V(X)+V(Y)+2cov(X,Y)=\frac{34}{45}\simeq 0,76$.

**Exercice 3**

1. On note $A$ l'évènement *l'individu répond qu'il est en faveur de cette politique*, et $F$ l'évènement *l'individu est en faveur de cette politique*. La probabilité demandée est $P(A)$ et est donnée par
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \text{ et } F)+P(A \text{ et } nonF) \\ &= P(A\mid F)P(F)+P(A\mid nonF)P(nonF) \\ &= 0,9\times 0,4+0,1\times 0,6 \;=\; 0,42. \end{aligned}$$

2. La probabilité demandée est $P(F\mid A)$, on applique la formule de Bayes:
$$\begin{aligned} P(F\mid A) &= \frac{P(A\mid F)P(F)}{P(A\mid F)P(F)+P(A\mid nonF)P(nonF)} \\ &= \frac{P(A\mid F)P(F)}{P(A)} \;=\; \frac{0,9\times 0,4}{0,42} \;=\; \frac{6}{7} \;\simeq\; 0,86. \end{aligned}$$

**Exercice 4**

On note $N$ l'évènement *on a choisi une pièce normale*, et $p_n$ l'évènement *on obtient pile aux $n$ premiers lancers*. Pour les questions 1., 2. et 3., il s'agit de calculer $P(N\mid p_n)$ pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$. On utilise la formule de Bayes:
$$\begin{aligned} P(N\mid p_n) &= \frac{P(p_n\mid N)P(N)}{P(p_n\mid N)P(N)+P(p_n\mid nonN)P(nonN)} \\ &= \frac{\frac{1}{2^n}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{2^n}\times\frac{9}{10}+1\times\frac{1}{10}}. \end{aligned}$$

On obtient donc les résultats suivants:

1. $P(N\mid p_1)=\frac{9}{11}\simeq 0,82$.
2. $P(N\mid p_2)=\frac{9}{13}\simeq 0,69$.
3. $P(N\mid p_3)=\frac{9}{17}\simeq 0,53$.
4. La probabilité est 1 puisqu'il est impossible d'obtenir *face* au quatrième lancer avec la fausse pièce.