L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 19 juin 2014

Justifiez vos réponses : la qualité de la rédaction est prise en compte.
Documents manuscrits et distribués en cours autorisés.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.** On considère les propositions suivantes :

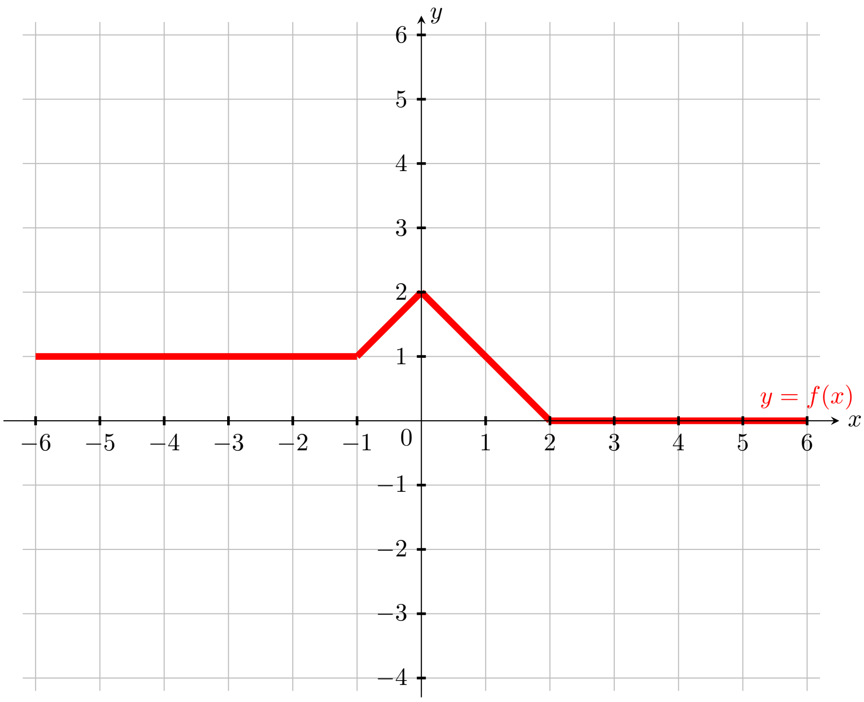
i. les éléphants portent toujours des pantalons courts;
ii. si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse;
iii. si un animal est facile à avaler alors il mange du miel;
iv. si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse.

On suppose que ces propositions sont vraies.

(1) Ecrire la contraposée de la proposition iii.
(2) Ecrire la négation de la proposition iv.
(3) Quelqu'un prétend déduire de ces propositions que les éléphants sont faciles à avaler. Cette déduction est-elle correcte ? *Justifier*

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.** On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(1) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(2) $x \mapsto f(x+1) + 2$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2} f(x) - 2$,
(4) $x \mapsto f(-2x) - 4$.



Exercice 3 (Suite)**.** On considère une suite géométrique décroissante $(u_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les deux termes u_0 et u_3 sont les solutions de l'équation :

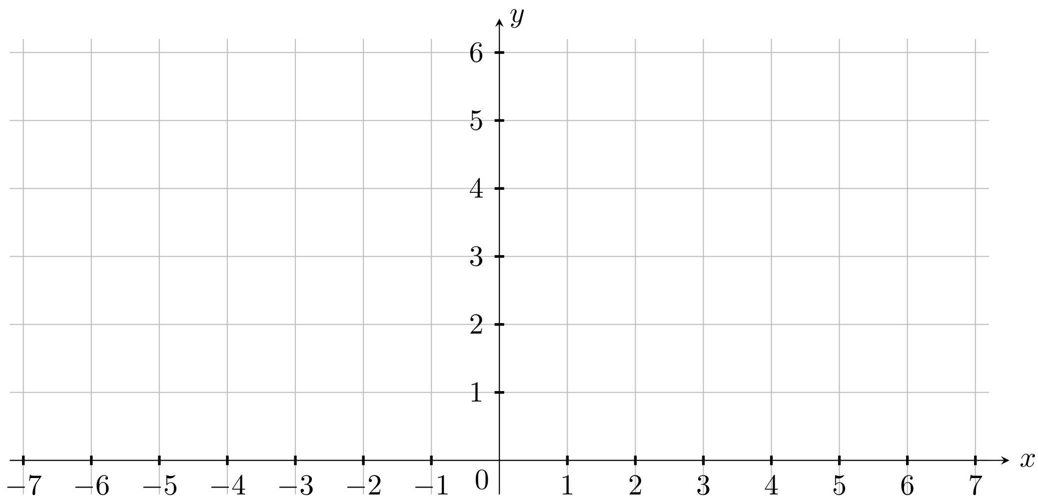
$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

(1) Calculer les deux réels u_0 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
(3) Pour $n \geq 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 + 2)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote ou une direction asymptotique en $+\infty$?
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1. On prendra comme approximation $\ln(2) \simeq 0,7$.
(6) Tracer la courbe représentative de f.



Exercice 5 (Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 2(x-1)y(x)$?
(2) On pose $z(x) = K(x)e^{(x-1)^2}$. Montrer que

$$z'(x) = 2(x-1)z(x) + x - 1 \quad \text{si et seulement si} \quad K'(x) = (x-1)e^{-(x-1)^2}.$$

(3) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto (x-1)e^{-(x-1)^2}$.
(4) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2(x-1)y(x) + x - 1$?

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal (dans $[0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.