L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 08 janvier 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.**

Pour étudier la validité d'une hypothèse scientifique H, on la confronte à la théorie déjà admise et on fait plusieurs expériences. On adopte le principe suivant :

Si H ne contredit pas la théorie et si toutes les expériences sont réussies,
alors H est validée.

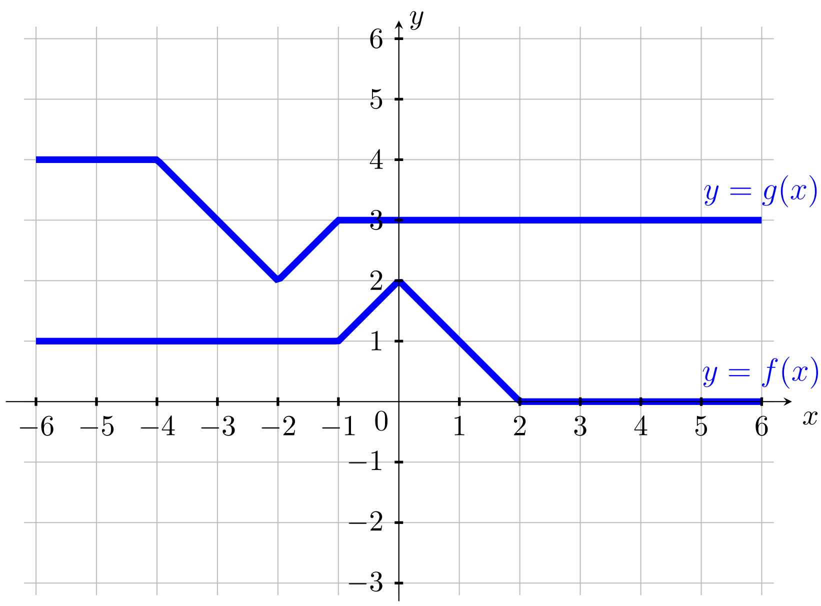
(1) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.
(2) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.
(3) On suppose que toutes les expériences ont réussi et que l'hypothèse H est validée. Peut-on en déduire que H ne contredit pas la théorie ?

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.**

Soit les fonctions f et g dont les graphes sont donnés ci-dessous.

(1) Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(a) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(b) $x \mapsto f(x-1)+1$,
(c) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - 3$,
(d) $x \mapsto f(-2x) - 2$.



(2) Exprimer g sous la forme $g(x) = af(bx+c)+d$ en explicitant les valeurs de a, b, c, d.

Exercice 3 (Suite)**.**

On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les trois termes u_0, u_2 et u_3 vérifient:

$$\begin{cases} u_0 - 5u_2 + u_3 &= -1 \\ 2u_0 - 7u_2 + 3u_3 &= 5 \\ -u_0 + 2u_2 + 9u_3 &= 5 \end{cases}$$

(1) Calculer les trois réels u_0, u_2 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
(3) Pour $n \geq 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, puis $\lim_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction).

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x + \ln\Big((x+1)^2 - 1\Big).$$

(1) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f.
Montrer que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $x^2 + 4x + 2$ pour tout $x \in D_f$, et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.

(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$, en $-\infty$, des asymptotes verticales? Si oui, écrire leurs équations.

(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$.
Existe-t-il un point (ou plusieurs) sur le graphe de f pour lequel la tangente admet coefficient directeur égal à 2? Si oui, trouver ce(s) point(s).

(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire).

On considère les équations différentielles

$$(A) \qquad\qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$(B) \qquad\qquad u'(x) + u(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ecrire toutes les solutions de l'équation (A).

(2) Déterminer une primitive de xe^{2x}.

(3) Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation (B).

(4) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = xe^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes).

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.

(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.