2 Fonctions numériques usuelles

2.1 Fonctions numériques

Définition 12 (Fonction numérique)**.** *Une* **fonction numérique** f *est un procédé qui à tout nombre réel* x *d'un sous-ensemble* $\mathcal{D}_f$ *de* $\mathbb{R}$ *associe un unique nombre réel noté* $f(x)$*. En général, ce procédé est donné sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} f:\ \mathcal{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{D}_f$ *est appelé* **ensemble de définition** *de* f*.*

Remarque 16.
- Une fonction f est donc la donnée à la fois du procédé qui permet de calculer sa valeur en un point donné mais aussi de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ sur lequel ce procédé est défini.
- Ne pas confondre la fonction f et le nombre réel $f(x)$.

Exemple 22.
- Pour deux nombres réels a et b fixés, on peut définir la fonction affine $f : x \mapsto a\,x + b$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathcal{D}_{|\cdot|} = \mathbb{R}$.
- La fonction partie entière $E : x \mapsto E(x)$ est définie sur $\mathcal{D}_E = \mathbb{R}$.
- La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Définition 13 (Image et antécédent)**.** *Soit* f *une fonction numérique définie sur l'ensemble* $\mathcal{D}_f$*. Si* x *est un élément de* $\mathcal{D}_f$ *alors le nombre réel* $f(x)$ *est appelé* **image de** x **par** f*. L'ensemble*

$$f(\mathcal{D}_f) = \{f(x)\ :\ x \in \mathcal{D}_f\}$$

qui regroupe toutes les images par f *des éléments* x *de* $\mathcal{D}_f$ *est appelé* **ensemble image de** f*.*
Soit y *un nombre réel, on appelle* **antécédent** *de* y *par* f *tout réel* x *de* $\mathcal{D}_f$ *tel que* $f(x) = y$*.*

Exercice 2. Donner les ensembles image des fonctions suivantes :
- La fonction valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathcal{D}_{|\cdot|} = \mathbb{R}$.
- La fonction partie entière $E : x \mapsto E(x)$ définie sur $\mathcal{D}_E = \mathbb{R}$.
- La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

Remarque 17. Un réel peut n'avoir aucun antécédent, peut en avoir un seul, ou plusieurs.. voire une infinité.

Exercice 3. Donner des exemples pour chacun des 4 cas de la remarque précédente.

Définition 14 (Restriction d'une fonction)**.** *Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, on appelle* **restriction de f à A** *la fonction notée $f_{|A}$ définie sur $\mathcal{D}_{f_{|A}} = A$ par $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.*

Exemple 23. Expression de la restriction de la fonction valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ à l'ensemble des nombres réels négatifs $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

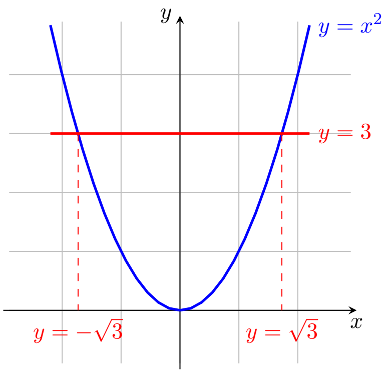
2.2 Graphe d'une fonction numérique – définition

Définition 15 (Graphe d'une fonction)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, on appelle* **graphe** *de f (ou* **courbe représentative de** *f) l'ensemble des points $(x, f(x))$ du plan dont l'abscisse x est un élément de $\mathcal{D}_f$ et l'ordonnée est l'image $f(x)$ de x par f. Cet ensemble est en général noté graph(f) ou $\mathcal{C}_f$:*

$$graph(f) = \{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}_f\}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée **équation cartésienne** *du graphe (ou de la courbe représentative) de f.*

Remarque 18. On peut facilement lire l'image d'un réel ainsi que ses antécédents à partir du graphe de la fonction. En particulier, le(s) antécédent(s) d'un réel z par f sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = z$ avec le graphe de f qui a pour équation $y = f(x)$:



Exemple 24 (Puissance entière)**.** Soit n un entier naturel non nul. La fonction "puissance n-ième" est la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$. Tracé des graphes dans les cas $n = 2$, $n = 3$, n pair et n impair grands.

Exemple 25 (Fonction inverse)**.** Tracé du graphe de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2.3 Réciproque, composition des fonctions

Définition 16 (Réciproque)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$.*

- *Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, alors* **l'image directe de A par f** *est l'ensemble noté $f(A)$ regroupant toutes les images $f(x)$ des éléments x de A :*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

- *Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors* **l'image réciproque de B par f** *est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ regroupant tous les antécédents des éléments y de B :*

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

Exercice 4.
- Donner les images directe et réciproque de l'ensemble $[1, 2]$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Donner les images directe et réciproque de l'ensemble $[0, 2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 19. La notation f^{-1} ne définit pas une fonction numérique : mathématiquement, c'est une application de l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de l'ensemble $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Par exemple, $f^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des antécédents du nombre 0 par f, qui peut être vide ou avoir un ou plusieurs éléments.

Définition 17 (Composée de fonctions)**.** *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. La* **fonction composée de f par g** *est la fonction numérique notée $g \circ f$ (on lit "g rond f") définie sur $f^{-1}(\mathcal{D}_g)$ par $g \circ f\colon x \mapsto g(f(x))$:*

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\mathcal{D}_g) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & \mathcal{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Exercice 5. Déterminer les fontions $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants :
- $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$ définies sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2\,x$ définies sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 18 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. On note A une partie de $\mathcal{D}_f$ et B une partie de $\mathbb{R}$.*

- *On dit que f est* **injective sur** *A si les images par f de deux éléments distincts $x \neq x'$ de A sont distinctes : $f(x) \neq f(x')$.*
  On dit que f est **injective** *si elle est injective sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.*

- *On dit que f est* **surjective dans** *B si tout élément y de B a au moins un antécédent x par f, c'est-à-dire que pour tout élément y de B il existe x tel que $f(x) = y$.*

- *On dit que f est* **bijective de A dans B** *si elle est à la fois injective sur A et surjective dans B.*

2.1. Propriété – Injectivité et bijectivité.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, A une partie de $\mathcal{D}_f$ et B une partie de $\mathbb{R}$.
La fonction f est injective sur A si et seulement si tout réel y au plus un antécédent par f dans A.
La fonction f est surjective dans B si et seulement si tout réel y de B a au moins un antécédent par f.
La fonction f est bijective de A dans B si et seulement si tout élément y de B a exactement un antécédent dans A.

Exemple 26. A partir de son graphe, on voit que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais est injective sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, elle est surjective dans $\mathbb{R}_+$, et donc bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. De même, la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 19 (Fonction réciproque)**.** *Si f est bijective de $\mathcal{D}_f$ sur son image $f(\mathcal{D}_f)$ alors le procédé qui à tout élément y de $f(\mathcal{D}_f)$ associe son unique antécédent x par f définit une fonction numérique qu'on note f^{-1} et qui est appelée* **fonction réciproque** *ou* **inverse** *de f.*

2.2. Propriété – Fonction réciproque.

Lorsque f est bijective sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, le graphe de sa fonction réciproque est le symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$.
De plus, on sait que pour tout élément x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f on a
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x,$$
et pour tout élément x de l'ensemble de définition $f(\mathcal{D}_f)$ de f^{-1} on a
$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}((x)) = x.$$

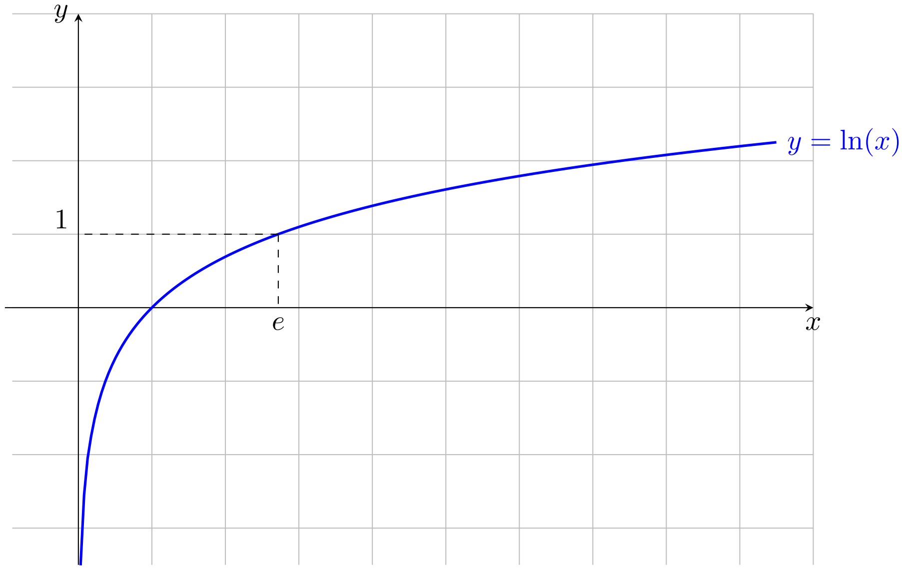
Exemple 27. Fonction réciproque de la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 20. Le graphe de la fonction réciproque de f s'obtient en prenant le symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$.

2.4 Logarithme Népérien et fonction exponentielle

Définition 20 (Logarithme Népérien)**.** *On appelle* **Logarithme Népérien***, noté* ln*, l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ qui vaut 0 en $x = 1$ et dont la dérivée sur $]0, +\infty[$ est la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$:*
$$\ln(1) = 0 \quad \textit{et} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \textit{ pour tout } x > 0$$

Le graphe de la fonction ln est :



2.3. Propriété – Logarithme Népérien.

- La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- Il existe un unique réel e tel que $\ln(e) = 1$, et $e \simeq 2,72$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

- Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(a^n) = n\,\ln(a)$$

et en particulier

$$\ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

Exercice 6. Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

$$\ln(e^2); \quad \ln(1000); \quad \ln(24) - \ln(8); \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

La fonction Logarithme Népérien est le logarithme le plus couramment utilisé en mathématiques, en raison de l'expression simple de sa dérivée, cependant en sciences on utilise souvent le Logarithme en base 2 (principalement en informatique) et le Logarithme en base 10 (sciences physiques). Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

Définition 21 (Logarithme en base a)**.** *Soit $a \neq 1$ un nombre réel strictement positif fixé. On appelle* **Logarithme en base** a*, noté* $\log_a$*, la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\log_a : x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Exemple 28. Ainsi le Logarithme en base 2 est la fonction $\log_2 : x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Le Logarithme en base 10 est la fonction $\log_{10} : x \mapsto \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, elle est aussi parfois simplement notée log.

Le Logarithme en base a a les mêmes propriétés que le Logarithme Népérien :

2.4. Propriété – Logarithme en base a.

- La fonction $\log_a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- On a :

$$log_a(1) = 0 \quad et \quad \log_a(a) = 1$$

- Pour tous réels $c > 0$ et $d > 0$:

$$\log_a(c\,d) = \log_a(c) + \log_a(d),$$

$$\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d).$$

- Pour tout réel $c > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_a(c^n) = n\,\log_a(c)$$

et en particulier

$$\log_a(c^{-1}) = \log_a\left(\frac{1}{c}\right) = -\ln(c)$$

Exemple 29. Simplifier :

a) $\log_2(4) - \log_2(2)$ b) $\log_2(8) - \log_2(0,5)$ c) $\log_2(1) + \log_{10}(1) + \log_{10}(10)$

La principale raison d'employer cette fonction est la propriété suivante

2.5. Propriété – Logarithme en base a bis.

- Pour tout réel $c > 0$ on a

$$\log_a(a\,c) \;=\; \log_a(c) + 1$$

- On suppose que $a > 1$. Dans ce cas, pour tout réel $c > 0$ on a :
  n est la partie entière de $\log_a(c)$ (c'est-à-dire $n \leq \log_a(c) < n+1$)
  si et seulement si

$$a^n \leq c < a^{n+1}$$

Exemple 30. Dans le cas du Logarithme en base 10, c'est-à-dire $a = 10$, on obtient

$$\log_{10}(10\,c) \;=\; \log_{10}(c) + 1,$$

et la partie entière de $\log_{10}(c)$ est le nombre entier n tel que

$$10^n \leq c < 10^{n+1}$$

ou autrement dit tel que c est dans l'intervalle $[10^n, 10^{n+1}[$: cet intervalle contient tous les nombres qui s'écrivent (en écriture décimale, qui est l'écriture usuelle des nombres) avec $n+1$ chiffres au-dessus de la virgule.

Exemple 31. Le pH d'une solution est donné par la formule

$$pH = -\log_{10}([H^+])$$

où $[H^+]$ est la concentration en ions $[H_3O^+]$. Lorsque le pH d'une solution augmente de 1 unité, cela signifie que la concentration $[H^+]$ a été divisée par 10. De plus, lorsque le pH vaut 7 (ce qui correspond au pH neutre) cela signifie que la concentration $[H^+]$ est égale à 10^{-7} (en $mol \cdot l^{-1}$).

Définition 22 (Exponentielle)**.** *La* **fonction exponentielle***, notée* exp*, est l'unique fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *qui vaut* 1 *en* $x = 0$ *et qui est égale à sa dérivée sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\exp(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \exp'(x) = \exp(x) \textit{ pour tout réel } x$$

2.6. Propriété – Fonction exponentielle.

- La fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln : c'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, et

$$\text{pour tout } x, \ \ln(\exp(x)) = x \quad \textit{et} \quad \text{pour tout } x > 0, \ \exp(\ln(x)) = x.$$

- En particulier $\exp(1) = e$.
- Pour tous réels a et b :

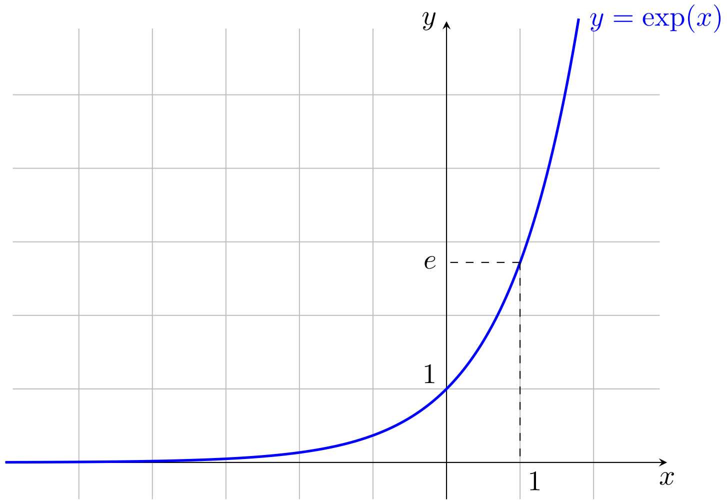
$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b),$$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}, \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

- Pour tout réel a et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(n\,a) = \exp(a)^n$$

Puisque exp est la fonction réciproque de la fonction ln, son graphe est le symétrique de celui de ln par rapport à la droite d'équation $y = x$:



Exemple 32. Calculs de $\exp(2x)$, $\exp(x^2)$ et $\exp(2\ln(2))$ (deux méthodes pour ce dernier).

Notation 9. *Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b on pose*

$$a^b = \exp(b \ln(a)).$$

Puisque $\ln(e) = 1$*, cela permet de donner une autre notation pour la fonction exponentielle :*

$$\textit{pour tout réel } x, \qquad \exp(x) = e^x.$$

Remarque 21. Cette notation est bien compatible avec celle des fonctions puissances, au sens que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n > 0$ on a

$$x^n = \exp(n \ln(x)) = e^{n \ln(x)} = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n\, fois}.$$

Exemple 33. Calcul de x^2, 2^x et $x^{\frac{1}{2}}$.

2.7. Propriété – Racine n-ième.

Pour tout entier $n > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par

$$x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{n}\ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}_+$, autrement dit c'est la fonction racine n-ième :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

2.8. Propriété – Règles de calcul.

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tous réels c et d on a

$$a^0 = 1,$$

$$a^{c+d} = a^c\, a^d, \qquad a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}, \qquad (a^c)^d = a^{c\,d}.$$

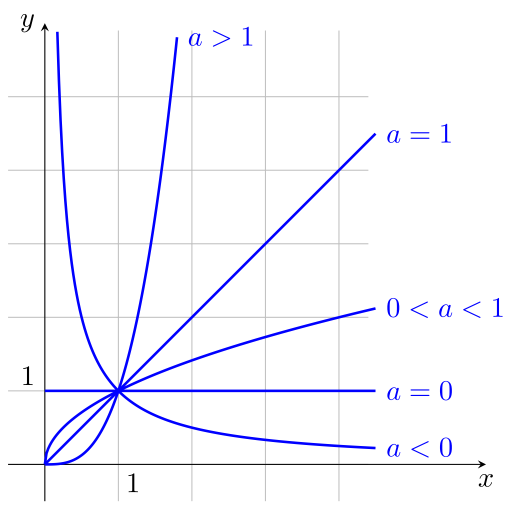
On peut maintenant définir les fonctions puissances et exponentielle de base a.

Définition 23. *Soit a un nombre réel, la fonction* **puissance** *a est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par*

$$x \mapsto x^a = e^{a\,\ln(x)}.$$

Lorsque $a > 0$, on définit en général ces fonctions sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ en ajoutant la valeur 0 en $x = 0$, c'est-à-dire $0^a = 0$.

Les graphes de ces fonctions, selon le paramètre a, sont :

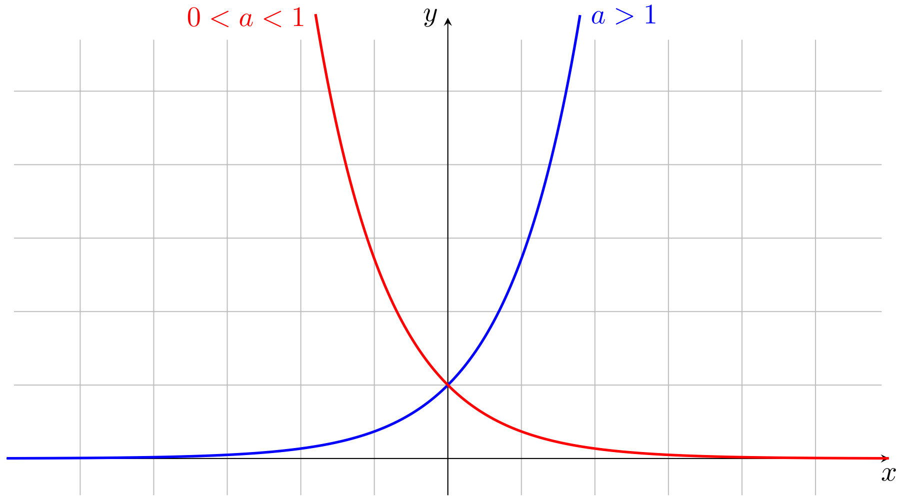


Définition 24. *Soit a un nombre réel strictement positif, la fonction* **exponentielle de base** a *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$x \mapsto a^x = e^{x\ \ln(a)}.$$

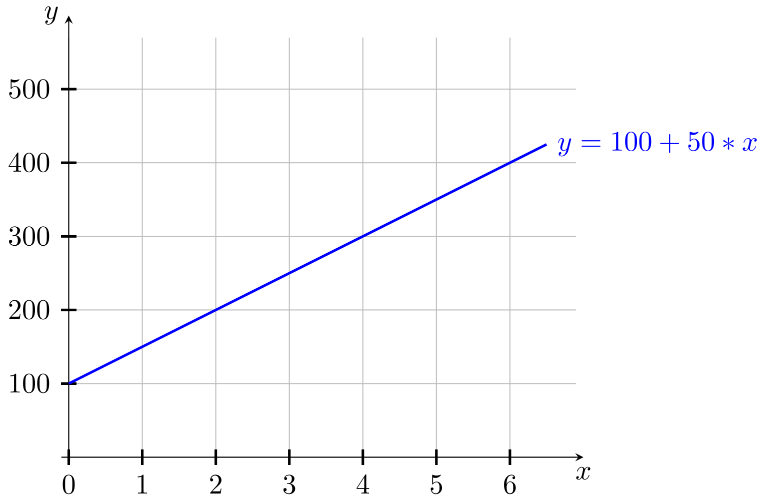
Remarque 22. La fonction exponentielle correspond au cas $a = e$.

Les graphes de ces fonctions, selon le paramètre a, sont :



2.5 Tracés en échelle logarithmique et semi-logarithmique

Lorsqu'on veut représenter une fonction ou des données, on emploie généralement une échelle linéaire sur l'axe des abscisses ainsi que sur l'axe des ordonnées, c'est-à-dire que la progression entre deux graduations est constante, comme par exemple dans le tracé :



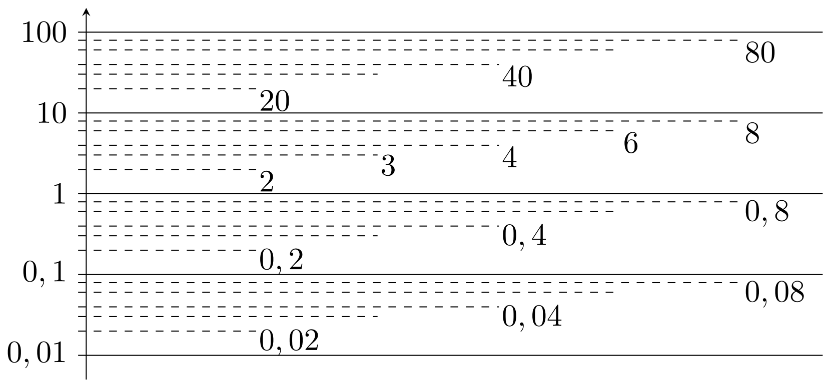
Par contre, lorsque les données ou la fonction à représenter ont des valeurs très disparates, avec une grande amplitude, ce type de représentation n'est plus adaptée. On emploie alors sur le(s) axe(s) pour le(s)quel(s) l'amplitude des valeurs est trop grande une échelle de type logarithmique, c'est à dire que chaque graduation correspond au logarithme (en général le logarithme en base 10) du nombre indiqué.

Lorsqu'on utilise une échelle linéraire sur l'un des deux axes et logarithmique sur l'autre on parle de **tracé en échelle semi-logarithmique**, lorsqu'on utilise une échelle logarithmique sur chacun des deux axes on parle de **tracé en échelle logarithmique**.

Remarque 23. On rappelle quelques valeurs de $\log_{10}$:

	0,001	0,01	0,1	1	2	3	4	8	10	100	1000	10^6
log_{10}	-3	-2	-1	0	0,3	0,5	0,6	0,9	1	2	3	6

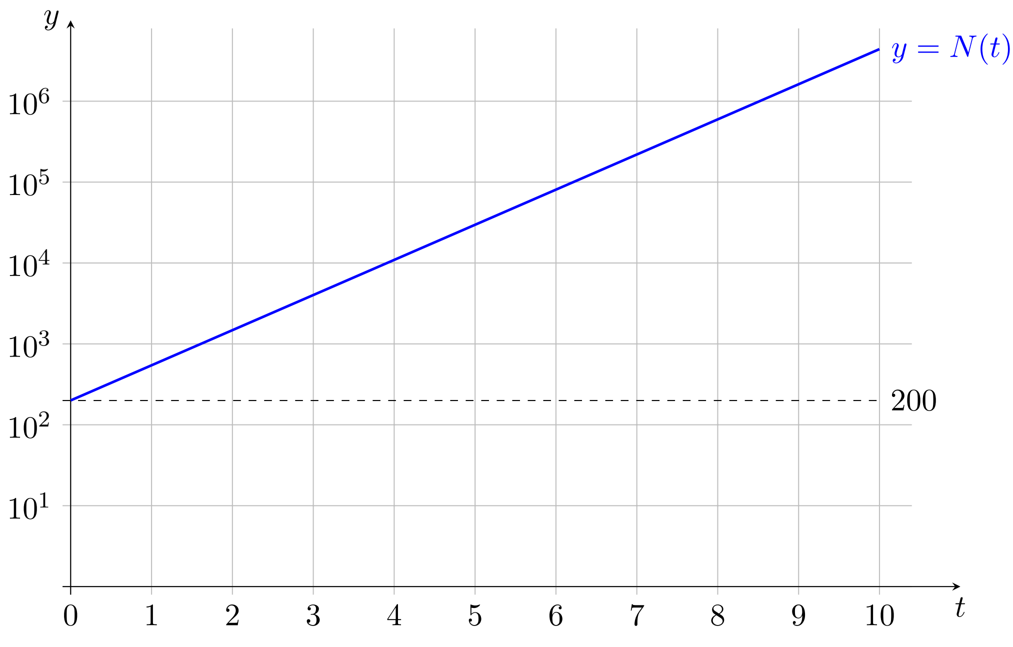
Par conséquent, si on utilise une échelle logarithmique sur un axe il est gradué de la manière suivante :



Exemple 34. Par exemple, si on s'intéresse à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre d'individus $N(t)$ est régi par la loi suivante pendant les dix premières secondes de culture :

$$N(t) = 200\, e^t$$

alors les valeurs de cette fonction vont de $N(0) = 200$ à $N(10) \simeq 4,4 \times 10^6$ en passant par $N(6) \simeq 80000$ et si on utilise le tracé en échelle semi-logarithmique (linéaire en abscisses et logarithmique en ordonnées) on obtient :

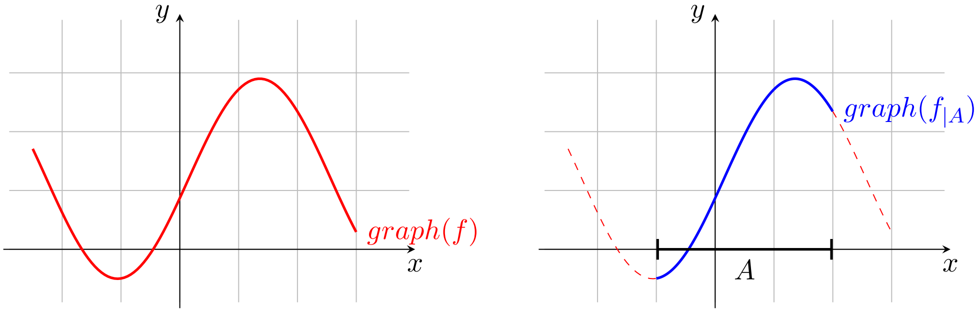


Cela revient en fait à tracer le graphe de la fonction $t \mapsto \log_{10}(N(t))$.

2.6 Graphe d'une fonction numérique – transformations

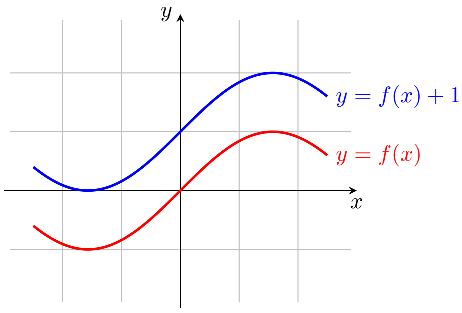
Des modifications simples de la fonction f engendrent des modifications plus ou moins compliquées du graphe de f, en voici quelques exemples.

2.9. Propriété – Graphe d'une restriction.
Le graphe de la restriction de f à A est obtenu à partir du graphe de f en ne conservant que les points du graphe de f dont l'abscisse est dans A :



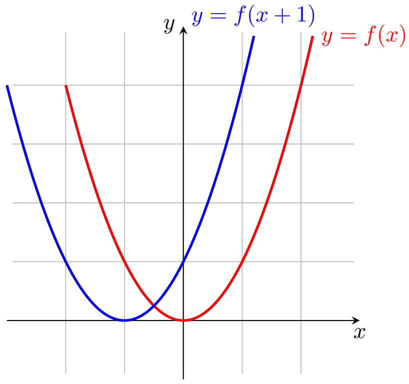
Exemple 35. Tracé du graphe de la restriction de la fonction inverse à l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ des nombres réels strictement positifs.

2.10. Propriété – Translation verticale.
Soit c un nombre réel fixé et f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Le graphe de la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) + c$, qui est définie sur $D_g = D_f$, s'obtient en déplaçant le graphe de f de c unités vers le haut dans le cas où $c > 0$, ou en le déplaçant de c unités vers le bas dans le cas où $c < 0$:



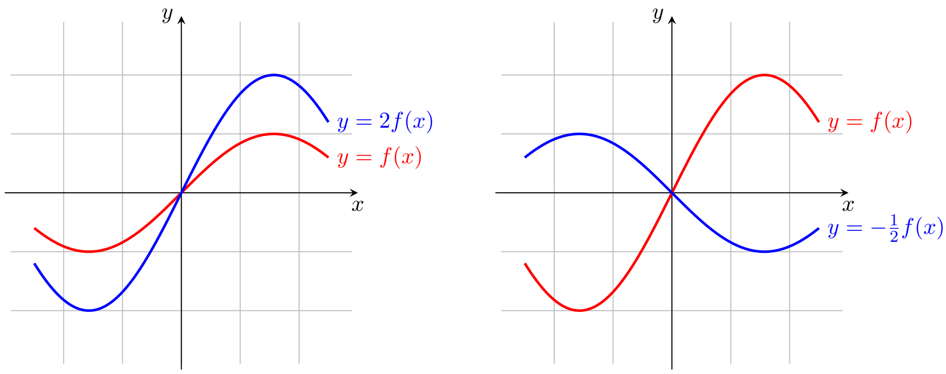
Exercice 7. Tracer du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

2.11. Propriété – Translation horizontale.
Soit c un nombre réel fixé et f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Le graphe de la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x+c)$ définie sur $D_g = D_f - c = \{x - c : x \in \mathcal{D}_f\}$ s'obtient en déplaçant le graphe de f de c unités vers la gauche dans le cas où $c > 0$, ou en le déplaçantde c unités vers la droite dans le cas où $c < 0$:

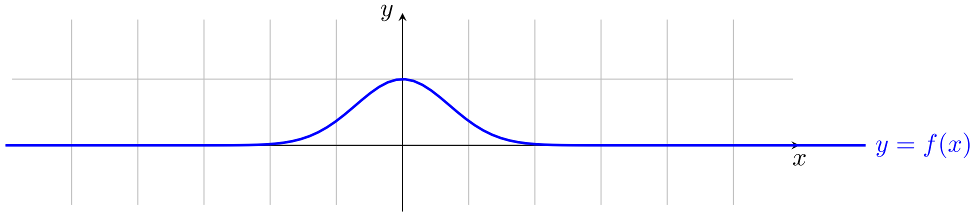


Exercice 8. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto (x-1)^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Forme canonique de $a\,x^2 + b\,x + c$ et racines.

2.12. Propriété – Dilatation ou contraction verticale.
Soit a un nombre réel fixé non nul et f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Le graphe de la fonction $g : x \mapsto g(x) = a\,f(x)$ définie sur $D_g = D_f$ s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe y des ordonnées d'un facteur a lorsque $a > 0$. Lorsque $a < 0$, il s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur $|a|$ après une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



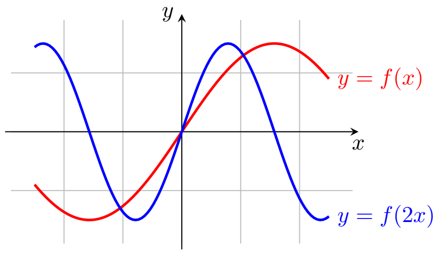
Exercice 9. On rappelle que la fonction gaussienne est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{-x^2}$:

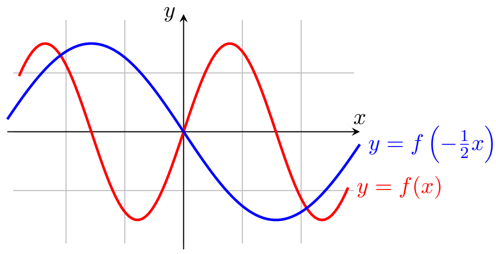


Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto 2\,f(x)$ et $x \mapsto -f(x)$.

2.13. Propriété – Dilatation ou contraction horizontale.

Soit a un nombre réel fixé non nul et f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Le graphe de la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(a\,x)$ définie sur $D_g = \{\frac{x}{a} : x \in \mathcal{D}_f\}$ s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe x des abscisses d'un facteur $\frac{1}{a}$ lorsque $a > 0$. Lorsque $a < 0$, il s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur $\frac{1}{|a|}$ après une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.





Exercice 10. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x) - 2$ pour la fonction gaussienne. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto f(-\frac{x}{2})$ pour la fonction inverse (deux méthodes).

Pour certaines fonctions les transformations précédentes aboutissent au même graphe. C'est par exemple le cas des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, dont le graphe ne change pas par translation horizontale.

On a aussi le cas des fonctions paires et impaires :

Définition 25 (Parité). *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, on dit que*

- *f est une fonction* **paire** *si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = f(x)$;*
- *f est une fonction* **impaire** *si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = -f(x)$.*

2.14. Propriété – Graphe des fonctions paires et impaires.

Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe y des ordonnées.
Une fonction est impaire si et seulement son graphe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

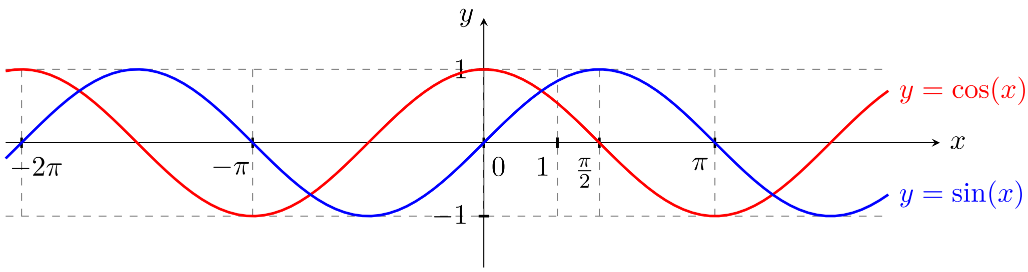
Exemple 36. Lorsque l'entier n est pair la fonction $x \mapsto x^n$ est paire, lorsque n est impair la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire. La fonction inverse est impaire.

2.7 Fonctions circulaires

Définition 26. *Le* **cercle trigonométrique***, ou* **cercle unité***, est le cercle centré en l'origine (point de coordonnées* $(0,0)$*) et de rayon* 1 *dans un repère orthonormé.*

Définition 27. *Les fonctions* **cosinus***, notée* $\cos$*, et* **sinus***, notée* $\sin$*, sont définies sur* $\mathbb{R}$ *de la manière suivante. Etant donné un nombre réel* x*, on construit le point* M *du cercle trigonométrique obtenu en parcourant le cercle trigonométrique dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) à partir du point* $(1,0)$ *sur une distance* x *si* $x \geq 0$*, et dans le sens inverse sur une distance* $|x|$ *si* $x < 0$*. La valeur* $\cos(x)$ *est alors l'abscisse de* M*, et* $\sin(x)$ *est son ordonnée.*

Les graphes de ces fonctions sont :



Remarque 24. Grâce au théorème de Pythagore on trouve que pour tout réel x on a

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

et on peut ainsi calculer les valeurs suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

A noter que $\frac{\pi}{6}$ correspond à 30 degrés (radians), $\frac{\pi}{4}$ correspond à 45 degrés et $\frac{\pi}{3}$ correspond à 60 degrés.

Remarque 25. Grâce au théorème de Thales, si le triangle ABC est rectangle en B alors on obtient :

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

A partir de la définition sur le cercle trigonométrique on obtient aussi le formulaire suivant.

2.15. Propriété – Formulaire trigonométrique.
Pour tous réels x et y on a les identités suivantes :

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x); \quad \sin(\pi - x) = \sin(x);$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x); \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x);$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x); \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x);$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x); \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x);$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y);$$

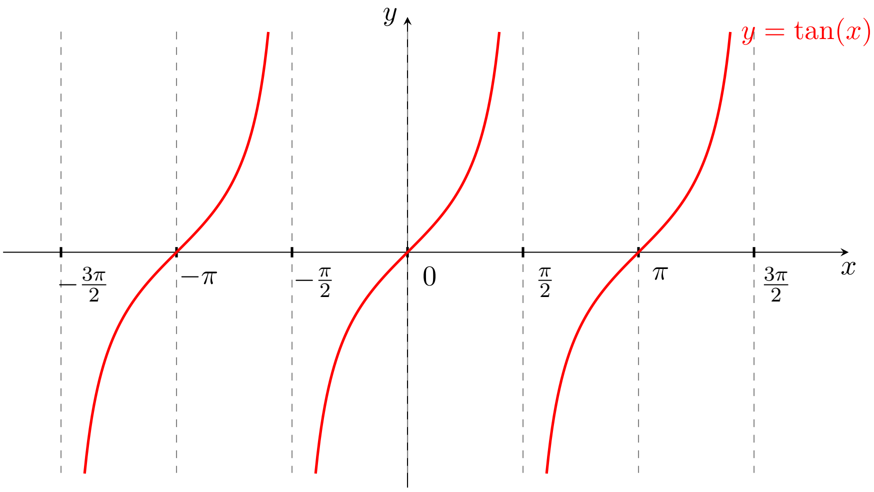
et en particulier :

$$cos(2x) = 2\,\cos(x)^2 - 1; \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Définition 28. *La fonction* **tangente**, *notée* tan, *est définie pour tous les réels x dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (c'est-à-dire les réels x qui ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier relatif) par la formule*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Le graphe de la fonction tangente est :



Remarque 26. On déduit des formules de la remarque 25 que si le triangle ABC est rectangle en B alors :

$$\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$