Équation de la tangente

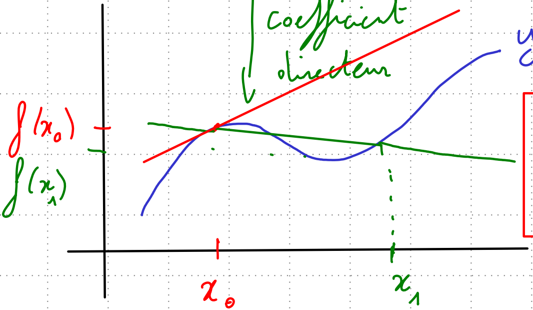
Si f est dérivable en x_0, alors l'équation de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$\boxed{y \;=\; f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}}$$

coefficient directeur

limite $x_1 \to x_0$



$$\boxed{y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)}$$

limite quand $x_1 \to x_0$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

dérivées à connaître

- pour $a \neq 0$ et $f : x \mapsto x^a$, $f'(x) = ax^{a-1}$ pour $x > 0$.
- pour $f : x \mapsto e^x$, $f'(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- pour $f : x \mapsto \ln(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
- pour $f : x \mapsto \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- pour $f : x \mapsto \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- pour $f : x \mapsto \tan(x)$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ sur $\mathcal{D}_f$.

à connaître : • $\cos' = -\sin$; $\sin' = \cos$;

• dérivée d'une puissance : $(x^a)' = a\,x^{a-1}$

exemples : * la dérivée de $x \mapsto x^2$ est : $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$

* la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$: $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

* la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$: $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$

Autre écriture de la dérivée comme limite

Si f est dérivable en x_0, alors on peut écrire :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

quotient différentiel entre x_0+h et x_0

Exemple. On retrouve les limites classiques :

$$* \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = 1 \qquad et \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ; \quad \lim_{h \to 0} x_0 + h = x_0$$

par composition des limites : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(\cancel{x_0}+h) - \cancel{x_0}}$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\overset{0+x}{x}) - \sin(0)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

Dérivation – Calculs

Théorème (Règles de calcul des dérivées)

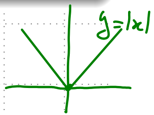
Si f et g sont dérivables sur I, alors sur I on a

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$
- si $f \neq 0$ sur I alors $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$
- si $g \neq 0$ sur I alors $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - g'\,f}{g^2}$

Remarque :

si g est dérivable au point x_0 alors g est continue au point x_0

[Réciproque fausse !]



$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(fg(x_0+h) - fg(x_0)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)g(x_0+h) + f(x_0)\left(g(x_0+h) - g(x_0)\right)\right]$$

Dérivation – Calculs

donc $(fg)'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x_0+h)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)}$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

<u>Pour le quotient</u> : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

<u>exemple</u> : $\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)}$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$\to = 1/\cos^2(x)$

$\to = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Théorème (Composée et réciproque)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si f dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$ alors $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

- Si f est bijective de I sur $f(I)$, dérivable sur I et $f' \neq 0$ sur I, alors f^{-1} dérivable sur $f(I)$ et

$$\forall y \in f(I), \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

<u>remarque</u> : si f dérivable sur I alors f est continue sur I donc $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires !!)

règle : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$
$= g' \circ f(x)\, f'(x)$

en particulier si f est bijective de réciproque f^{-1}

on a : $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

on dérive : $g = f^{-1}$: $(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x))\, f'(x) = 1$

donc $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$

pour $x = f^{-1}(y)$: $f(x) = y$ donc : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Théorème (Règle de l'Hôpital)

On suppose que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\left(\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Alors si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe on a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemple. On retrouve ainsi : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

la limite de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ en 0 est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$

on calcule $\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'} = \frac{0-(-\sin(x))}{2x} = \frac{\sin(x)}{2x}$, c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ...

on calcule $\frac{(\sin(x))'}{(2x)'} = \frac{\cos(x)}{2}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

Par la règle de l'Hôpital : $\lim \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim \frac{\sin(x)}{2x} = \lim \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$.

Théorème (Dérivée et monotonie)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I. Autrement dit :

$$\text{"}\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]\text{"} \boxed{\Leftrightarrow} \text{"}\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0\text{"}$$

- Si f' est strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I :

$$\text{"}\forall x \in I,\ f'(x) > 0\text{"} \Rightarrow \text{"}\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]\text{"}$$

$\rightarrow$ f est croissante sur I

exemple : * on a : $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

donc $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$

Théorème (Dérivée et monotonie)

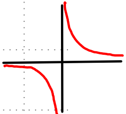
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f dérivable sur I.

- f est décroissante sur I si et seulement si la $f' \leq 0$ sur I.
- Si $f' < 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement décroissante sur I.
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

de dérivée $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ qui est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$

donc $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[= \mathbb{R}^*_-$ et $]0, +\infty[= \mathbb{R}^*_+$.



exemple : $-1 < 1$ mais $\frac{1}{-1} = -1 < \frac{1}{1} = 1$

Théorème (Composition et monotonie)

Soit f et g deux fonctions.
Si g est croissante sur $f(I)$, alors

- si f est croissante sur I alors $g \circ f$ est croissante sur I
- si f est décroissante sur I alors $g \circ f$ est décroissante sur I

Si g est décroissante sur $f(I)$, alors

- si f est croissante sur I alors $g \circ f$ est décroissante sur I
- si f est décroissante sur I alors $g \circ f$ est croissante sur I

on suppose f décroissante et g croissante :

si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ car f décroissante

donc $g(f(x)) \geq g(f(y))$ car g croissante

donc $g \circ f$ est décroissante.

Autre méthode : $(g \circ f)' = g' \circ f \times f' \leq 0$ donc $g \circ f$ décroissante

$g' \circ f \geq 0$ car g croissante

$f' \leq 0$ car f décroissante

Tableau de variations

Le tableau de variations de f indique :

- le signe de la dérivée f' (indiqué par $+$ ou $-$),
- le sens de variations de la fonction f ("croissant" et "décroissant" étant symbolisés par les flèches $\nearrow$ et $\searrow$),
- les valeurs de f au(x) point(s) où la dérivée f' s'annule,
- les limites éventuelles en $-\infty$, $+\infty$ et en les points où f n'est pas définie.

Exemple. On étudie le cas de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

le tableau de variations de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	$\|$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Tableau de variations

Exemple

Tableau de variations de la fonction $x \mapsto x + \ln((x+1)^2 - 1)$ (examen juin 2016).

on pose $f(x) = x + \ln((x+1)^2 - 1)$

$*$ $(x+1)^2 - 1 = x(x+2)$, on a alors le tableau de signe :

		-2		0	
x	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
$x(x+2)$	$+$		$-$		$+$

donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$*$ $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x(x+2)}$

les racines de $x^2 + 4x + 2$ sont $-2-\sqrt{2}$ et $-2+\sqrt{2}$

On obtient le tableau de variations :

x		$-2-\sqrt{2}$		-2	$-2+\sqrt{2}$	0	
f'	$+$	0	$-$				$+$
f	$-\infty \nearrow$	$f(-2-\sqrt{2})$	$\searrow -\infty$				$-\infty \nearrow +\infty$

Extrema locaux et globaux

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$,

- *f atteint son* **minimum sur** *I au point c si $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I$; dans ce cas le minimum de f sur I vaut $f(c)$.*
- *f atteint son* **maximum sur** *I au point c si $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I$; dans ce cas le maximum de f sur I vaut $f(c)$.*

Le terme **extremum** *(au pluriel extrema) recouvre toutes ces notions.*

exemple : la fonction $x \mapsto x + \ln((x+1)^2 - 1)$ atteint son maximum sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ au point $c = -2 - \sqrt{2}$: $\forall x \in]-\infty, -2[, \ f(x) \leq f(c)$

Extrema locaux et globaux

Remarque : réciproque fausse !!
$x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$
mais f n'atteint pas de minimum en 0.

Extrema locaux et dérivée

Si f atteint un minimum (ou maximum) local en c alors $f'(c) = 0$. En particulier, la tangente au graphe de f au point $(c, f(c))$ est une droite horizontale.

→ en effet, si f atteint un extrémum en c alors sa dérivée change de signe, donc si elle est dérivable en c sa dérivée est nulle.

Remarque : par la contraposée, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$ n'atteignent pas d'extrémum sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convexité, concavité, points d'inflexion

Définition

f est **convexe sur l'intervalle** *I si sa dérivée est croissante sur I.*
f est **concave sur** *I si sa dérivée est décroissante sur I.*

Remarque

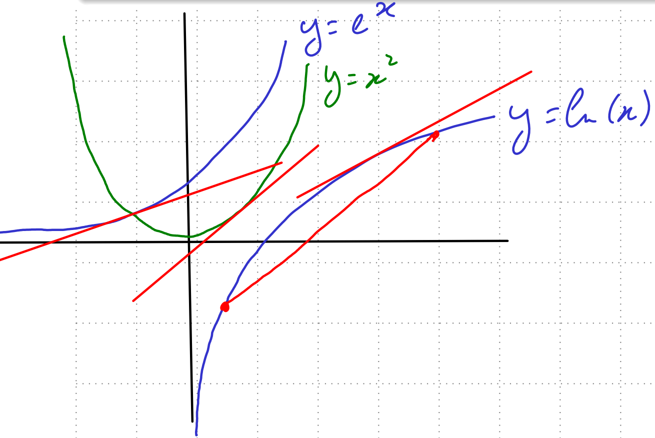
f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Exemple. Les fonctions ln et $\exp$.

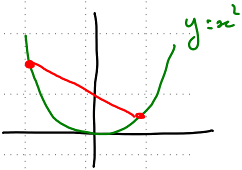
la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante $\mathbb{R}_+^*$
donc ln est concave.
la dérivée de ~~x~~ $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
donc exp. est convexe
la dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$ est croissante donc
$x \mapsto x^2$ est convexe.

Théorème (position graphe / tangente)

- si f est convexe sur I, alors le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I,
- si f est concave sur I, alors le graphe de f est au-dessous de toutes ses tangentes sur I.



Remarque : une fonction convexe est <u>en-dessous de ses cordes</u>.



Définition

Si la dérivée f' est dérivable sur I on dit que f **est deux fois dérivable sur** I*. On note alors f'' la dérivée de f', et on l'appelle* **dérivée seconde de** f *sur I.*

Théorème (Convexité / concavité et dérivée seconde)

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I,
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

f'' se lit "f seconde"

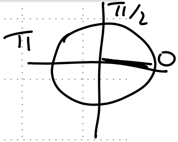
f est convexe ssi f' est croissante sur I

ssi f'' est positive.

Définition

Tangente en $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $y = \cos'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi/2)$
$= -(x - \pi/2) = -x + \pi/2$

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, un point x_0 de I est appelé **point d'inflexion de** f *si sa dérivée seconde f'' change de signe au point x_0.*

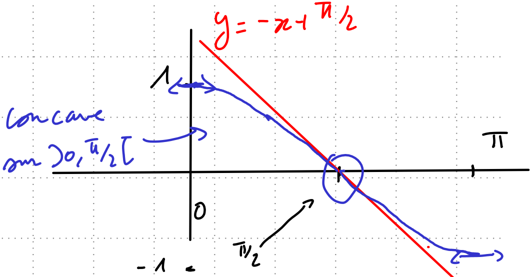


exemple : soit $f : x \mapsto \cos(x)$

alors $f' : x \mapsto \cos'(x) = -\sin(x)$

et $f'' : x \mapsto (-\sin)'(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$

	0	$\pi/2$	π
f''	$-$	0	$+$
f'	$-$	-1	$-$
f	$+$	0	$-$



Tracé du graphe d'une fonction

Etapes pour le tracé du graphe de f

- limites de f aux bords de son domaine de définition ;
- asymptotes de f en $-\infty$ et $+\infty$;
- calcul de la dérivée f', tableau de variations de f, extrema ;
- calcul de la dérivée seconde f'', intervalles sur lesquels f est convexe ou concave, points d'inflexion.
- Tracé du graphe de f : asymptotes, tangentes horizontales aux extrema, tangentes aux points d'inflexion.