Variables aléatoires à densité

1 Variance nulle

Soit X une v.a. réelle à densité continue admettant une espérance et une variance.

1. Si X est une v.a. réelle à densité continue, montrez que $\sigma_X > 0$.
2. Démontrez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev: pour tout $a > 0$,

$$P[|X - E(X)| \geq a\sigma_X] \leq \frac{1}{a^2}.$$

2 Rencontre

Castor et Pollux projettent de se rencontrer entre 17h et 18h. Chacun d'eux a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes. On suppose qu'ils arrivent indépendamments à des instants uniformément distribués entre 17h et 18h.

1. Calculez la probabilité d'une rencontre.
2. A présent, Castor fixe son heure d'arrivée à x. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Pollux?
3. Arrivant à l'heure x, Castor ne trouve personne. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Pollux?

3 Variables amnésiques

Soit T une v.a.r. positive à densité continue telle que, $\forall s, t \geq 0$: $P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s)$. Le but de cet exercice est de montrer que, soit $P(T > 0) = 0$, soit T suit une loi exponentielle.

1. Montrez que si $P(T > 0) \neq 0$, alors $\forall t > 0$, $P(T > t) > 0$.
2. On définit alors l'application $f(t) = \ln(P(T > t))$, $t > 0$. Montrez que $f(x) = xf(1)$, pour $x \in \mathbb{Q}^+$ puis pour $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Conclure

4 Lois gammas

Pour $a > 0, \lambda > 0$, on pose $\Gamma(a) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$ et $\gamma_{a,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}$, si $x > 0$, $\gamma_{a,\lambda}(x) = 0$ si $x \leq 0$. On appelle loi gamma $G(a, \lambda)$ la loi de densité $\gamma_{a,\lambda}$.

1. Vérifiez que $\Gamma(.)$ est bien définie, continue sur $]0, +\infty[$, et que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\Gamma(n+1) = n!$

2. Soit X une v.a. de loi $G(a, \lambda)$, calculez $E(X)$, $Var(X)$.

3. ** Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi $G(a, \lambda)$, $G(b, \lambda)$. Montrez que la loi de $Z = X + Y$ est $G(a + b, \lambda)$. On pourra calculer $E(\varphi(Z))$ à l'aide de la loi du couple (X, Y) et ramener l'intégrale double à une intégrale simple.

4. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a. indépendantes de loi exponentielles de paramètre λ, donnez la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.

5. Si $Y_1, \cdots, Y_n$ sont n v.a. indépendantes de loi normale centrées réduites, montrez que Y_1^2 suit la loi $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. Donnez la loi de $Z := Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$, et calculez $E(Z)$, $Var(Z)$.

5 Pannes d'ampoules

On dispose d'un lot d'ampoules électriques identiques. On suppose que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a. X qui suit une loi exponentielle de paramétre $\lambda > 0$. Pour les applications numériques, le temps est exprimé en heure, et $\lambda := 10^{-3}$, $T = 200$, $\theta = 10^4$.

1. Calculez la durée de vie moyenne de chaque ampoule.

2. Quelle est la probabilité pour qu'une ampoule s'éteigne avant une durée T de fonctionnement?

3. On branche 2 ampoules simultanéments à un instant $t_0 = 0$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, les 2 ampoules soient encore allumées?

   (b) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, au moins l'une des 2 ampoules soit encore allumée?

   (c) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, les 2 ampoules soient éteintes?

   On branche 10 ampoules simultanéments à un instant $t_0 = 0$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, toutes les ampoules soient encore allumées?

   (b) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, toutes les ampoules soient éteintes?

4. On branche une première ampoule à un instant $t_0 = 0$. Dès que celle-ci meurt, on la remplace par une seconde ampoule. Quelle est la loi de probabilité du temps déclairage à l'aide de ces deux ampoules et quel est le temps moyen d'éclairage?

5. On opère de façon identique avec n ampoules. Quelle est la loi de probabilité du temps déclairage?

6. Soit $\theta > 0$ fixé. On suppose qu'à un instant $t_0 = 0$, on branche la première ampoule. Dés qu'une ampoule meurt, on dit qu'il y a panne, on la remplace par une autre. Soit N le mombre de pannes durant le temps θ. Quelle est la loi de probabilité de N?