Master 2 Enseignement
T. Champion & S. Junca

Dénombrements

1 Des livres sur une étagère

Dans une bibliothèque, n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur Godement, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de Godement se retrouvent côte à côte dans les cas suivants:

1. $n = 20,\ k = 3,\ p = 3$;
2. * $n = 20,\ k = 5,\ p = 2$;

2 Compter des $p-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est le nombre de $p-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que: $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p < n$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$ est le nombre de $p-$uplets $(y_1, y_2, \cdots, y_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que: $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_p < n$.
   On pourra poser $x_i = y_i + (i-1)$ et se ramener au cas précédent.
3. Montrer que $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$ est le nombre de $p-$uplets $(z_1, z_2, \cdots, z_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que: $z_1 + z_2 + \cdots + z_p = n$
   On pourra poser $y_i = z_1 + \cdots + z_i$ et se ramener au cas précédent.
   Une autre méthode élégante consiste à coder les solutions: z_i remplacé par des 1 (dont la somme est z_i) et garder les symboles $+$. On conclut en comptant le nombre de tels codes.
4. Soit $1 \leq p \leq n$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ où $n_i \in \mathbb{N}$. Compter le nombre $C_n^{n_1, n_2, \cdots, n_p}$ de $p-$uplets $X := (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que:
   X contient n_1 fois 1, n_2 fois 2, $\ldots n_p$ fois p.
5. Exemples :
   (a) Combien y-a-t'il d'injections croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$?
   (b) 20 auteurs ont écrit des livres particulièrement intéressants pour réussir notre concours. On a un buget suffisant pour acheter 10 livres. Il va falloir faire un choix. On ne pourra pas avoir un livre par auteur. En revanche, on pourra avoir plusieurs livres du même auteur. Pour chaque achat possible de 10 livres,

on ne s'intéresse qu'aux *séquences* des nombres de livres achetés de chacun de ces auteurs recommandés.
Sachant que ces auteurs ont tous publié au moins 10 livres, pouvez vous trouver le nombre de séquences possibles?

(c) De Combien de façons peut-on partager 100 pièces de 1 Euro entre 5 personnes?

(d) Compter les anagrammes du mot : MATHEMATIQUE.

(e) Montrer que $(z_1 + z_2 + \cdots + z_p)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_p=n} C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_p} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_p^{n_p}$.
Caluler le nombre de termes de cette somme.
Développer $(x + y + z)^3$.

3 Séries entières et dénombrement

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ cherchez le nombre c_n de solution entières $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ de:

$$x_1 + 2x_2 = n.$$

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z) := \frac{1}{(1-z)(1-z^2)}$ pour $|z| < 1$.

3. Recalculer c_n en développant f en série entière à l'origine.

4. Compter le nombre de solutions entières positives ou nulles de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$, pour $0 \leq n \leq 10$.

4 Partitions et Séries entières

$\{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$ est une partition de $\{1, \cdots, n\}$, si les Ω_j sont non vides, deux à deux disjoints, et si leur union est $\{1, \cdots, n\}$. On note p_n le nombre de partition de $\{1, \cdots, n\}$: $p_0 = 1$ (par convention), $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$.

1. Montrer que $p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j p_{n-j}$.

2. On pose alors $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$. Montrer que $f \in C^\infty(]-1, 1[)$.

3. Montrer que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire une expression de f.

4. Calculer le nombre de partition de $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

5. Montrer que $p_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^n}{j!}$.
indication: développer en série entière $e^{(e^x)}$.
En redéduire p_7 en évaluant numériquement la série pour $n = 7$.