Analyse Numérique - TP 3 - corrigé

Exercice 1.

(1) Utiliser la fonction trapeze_composite pour calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

en décomposant l'intervalle en 10, 50, 100 et 1000. Évaluer l'exactitude des résultats (la deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$). Sont-ils cohérents avec le résultat du cours ? *On rappelle que l'erreur doit être inférieure à* $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''|$.

(2) Reprendre la question précédente en programmant cette fois la méthode de Cavalieri-Simpson composite. On rappelle que sur l'intervalle $[a, b]$ la formule de Cavalieri-Simpson s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Ls résultats sont-ils cohérents avec ceux du cours ? *Rappel : l'erreur doit être inférieure à* $\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$.

(3) Tracer sur un même graphique les courbes de la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt$ sur l'intervalle $[0,1;5]$ pour les deux méthodes précédentes en utilisant une décomposition de chaque intervalle en 20.

Corrigé de l'exercice 1. Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp3-1617-correc.py`.

On remarque en exécutant les codes que les erreurs théoriques majorent effectivement les erreurs observées dans la pratique.

Pour la question 3 on obtient la figure 1, sur laquelle on voit que les deux formules de quadrature donnent un résultat proche de ce qu'on attend (le graphe devrait être celui de la fonction logarithme népérien).

Exercice 2.

(1) A l'aide de la fonction euler_progressif, résoudre l'équation différentielle $y' = y$ sur l'intervalle $[0, 2]$, en supposant $y(0) = 1$, pour différentes valeurs du paramètre n : 10, 50, 100.

(2) À partir de quelle valeur de n la solution calculée donne-t-elle $y(1)$ à 10^{-3} près ? On pourra supposer n pair.

(3) Reprendre les deux questions précédentes avec le schéma d'Euler modifié, pour lequel on utilise la formule :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2}f(t_n, y(t_n))\right) \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

(4) Tracer, avec les deux schémas numériques ci-dessus, la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{2(t+1)}$ et $y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0, 8]$.

Corrigé de l'exercice 2. Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp3-1617-correc.py`.

Pour la question 1 on obtient la figure 2, et pour la question 3 on obtient la figure 3, où l'on voit que les solutions calculées approchent effectivement la fonction exponentielle.

Pour la question 4 on obtient la figure 4, sur laquelle on a tracé le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ et la solution obtenue par la méthode d'Euler modifié pour 100 points : on voit que les deux graphes coïncident presque.

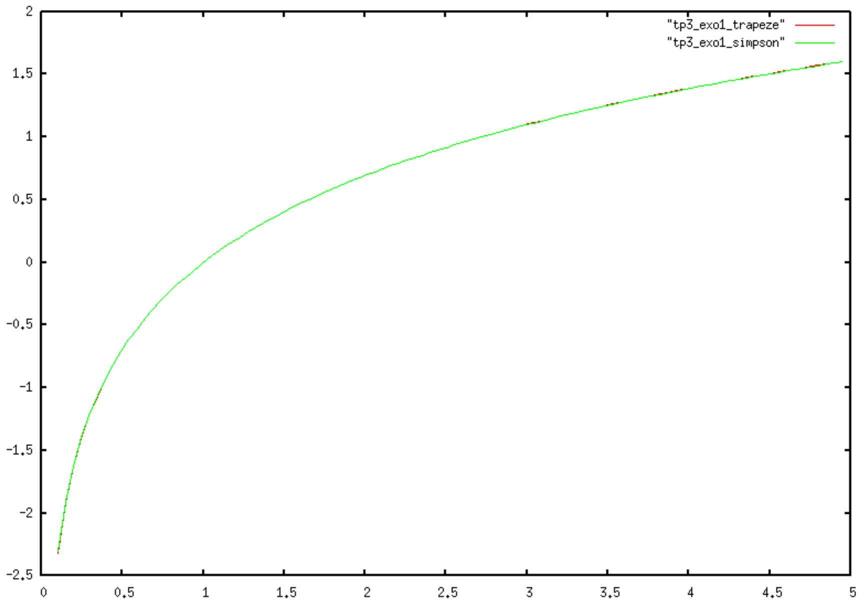

FIGURE 1. Exercice 1

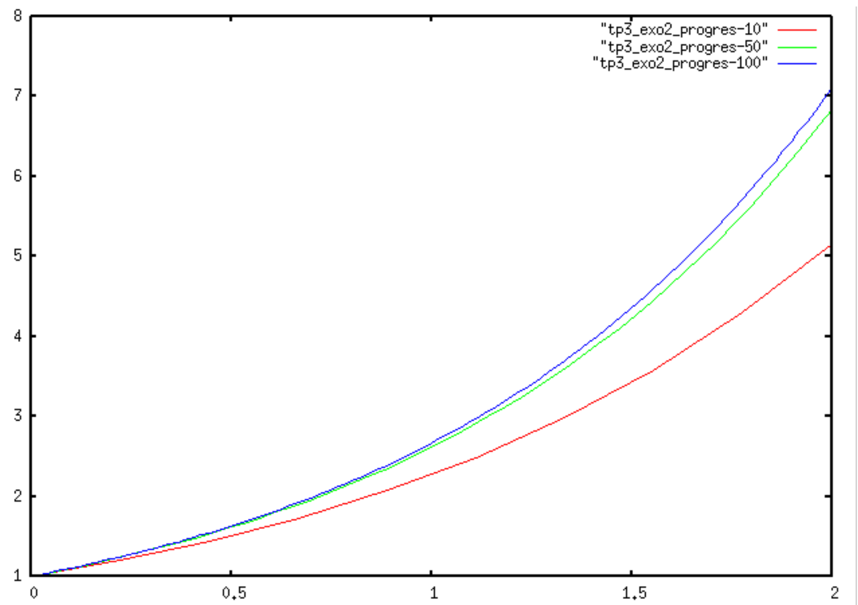

FIGURE 2. Exercice 2 question 1

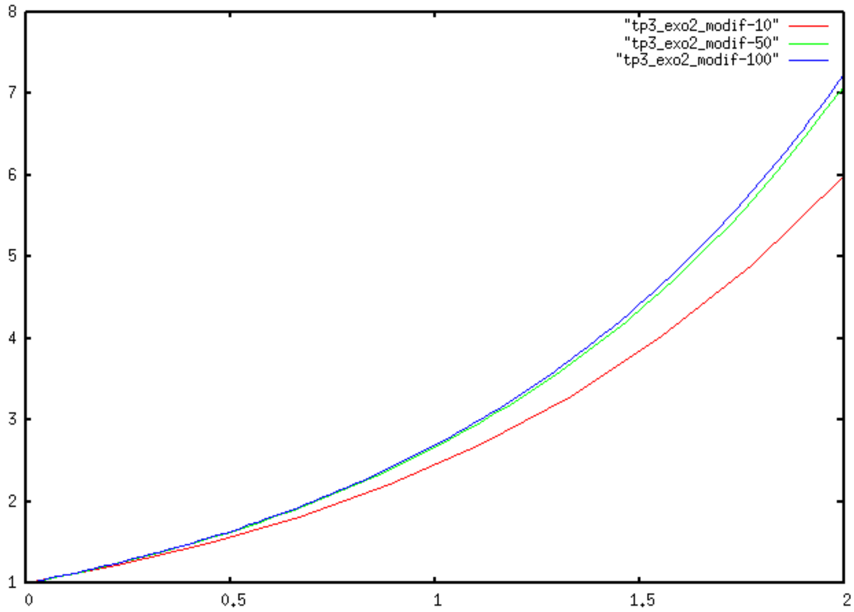

FIGURE 3. Exercice 2 question 3

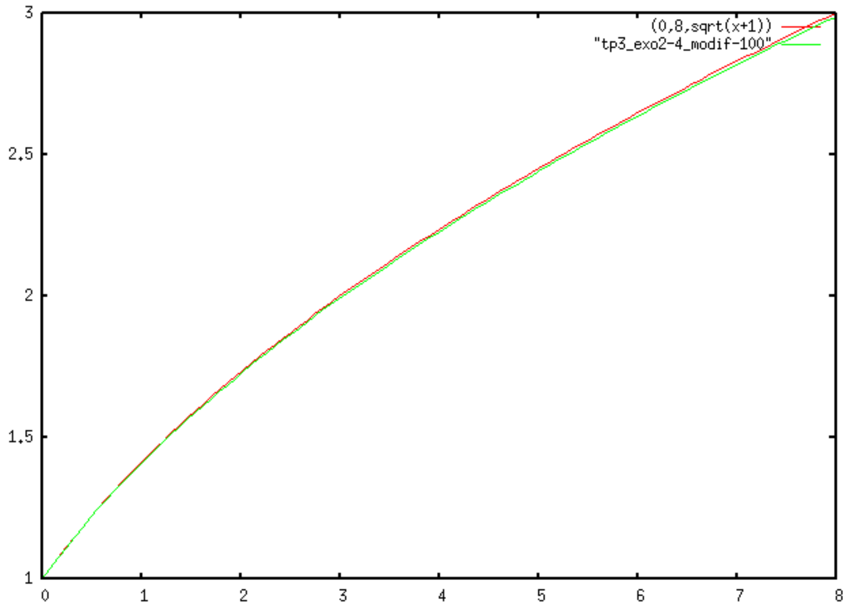

FIGURE 4. Exercice 2 question 4