Analyse Numérique - TP 3

L2 MATHÉMATIQUES, 2015-2016

L'objet de ce TP est l'utilisation des formules de quadratures pour le calcul d'intégrales et de primitives, puis la résolution d'équations différentielles ordinaires.

Dans le répertoire TP-AN-2015 de votre espace de travail, enregistrez le fichier tp3-1516.py depuis le site

`http://champion.univ-tln.fr/`

en suivant les liens `Enseignement` puis `Analyse Numérique de semestre 3`.
Vous transmettrez votre rapport par courriel à l'adresse champion@univ-tln.fr sous la forme : tp3-VOTRENOM.pdf.

Exercice 1.

(1) Utiliser la fonction trapeze_composite pour calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$
en décomposant l'intervalle en 10, 50, 100 et 1000. Évaluer l'exactitude des résultats (la deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$). Sont-ils cohérents avec le résultat du cours ? On rappelle que l'erreur doit être inférieure à $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''|$.

(2) Reprendre la question précédente en programmant cette fois la méthode de Cavalieri-Simpson, pour laquelle on rappelle que sur l'intervalle $[a, b]$ elle s'écrit :
$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$
Dans ce cas, l'erreur doit être inférieure à $\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$.

(3) Tracer sur un même graphique les courbes de la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt$ sur l'intervalle $[0,1;5]$ pour les deux méthodes précédentes en utilisant une décomposition de chaque intervalle en 20.

(4) Comparer la fonction trapeze_composite du fichier tp3-1516.py et celle proposée dans le fascicule de cours.

Exercice 2.

(1) A l'aide de la fonction euler_progressif, résoudre l'équation différentielle $y' = y$ sur l'intervalle $[0, 2]$, en supposant $y(0) = 1$, pour différentes valeurs du paramètre n : 10, 50, 100.

(2) À partir de quelle valeur de n la solution calculée donne-t-elle $y(1)$ à 10^{-3} près ? On pourra supposer n pair.

(3) Reprendre les deux questions précédentes avec le schéma d'Euler modifié, pour lequel on rappelle la formule du fascicule :
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2}f\left(t_n, y(t_n)\right)\right) \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

(4) Tracer, avec les deux schémas numériques ci-dessus, la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{2(t+1)}$ et $y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0, 8]$.