SESSION 2003

Filière MP

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Le but de ce problème est l'étude mathématique de la notion d'*entropie*. La partie I est consacrée à des questions préliminaires et les parties suivantes à l'étude des propriétés et des liens entre différentes définitions de l'entropie.

Notations et rappels :
On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $f(x)=0$ pour tout $x \notin [a,b]$.
On aura besoin de considérer la fonction $x \mapsto x\ln x$ définie pour $x>0$, et par continuité, lorsque $x=0$, on posera $x\ln x = 0$.
D'autre part, on rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Partie I

Dans cette partie, φ désigne une fonction de classe C^2 définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que la dérivée seconde de φ est positive sur I (on dira alors que φ est convexe).

I-1. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que

$$\forall x, y \in I \quad \varphi(y) \geqslant \varphi(x) + (y-x)\varphi'(x).$$

I-2. Soit un entier $n \geqslant 2$, soient $x_1, \ldots, x_n$ dans I se soient $a_1, \ldots, a_n$ dans $[0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. En utilisant la question précédente avec $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, montrer que

$$\varphi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i).$$

I-3. Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que : f est positive sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = 1$ et g est à valeurs dans I. Montrer que

$$\varphi\left(\int_a^b g(x)f(x)dx\right) \leqslant \int_a^b \varphi(g(x))f(x)dx.$$

Partie II

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout i entier entre 1 et n, $p_i \geqslant 0$ et tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. On définit alors sur $\mathcal{A}_n$ la fonction *entropie*, notée H_n, par

$$H_n(\mathbf{p}) = H_n(p_1, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i.$$

II-1. Soit un entier $k \geqslant 2$, et soit $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_k)$ dans $\mathcal{A}_k$ tel que pour tout i entre 1 et k, $p_i > 0$. A l'aide de la convexité de la fonction $x \mapsto -\ln x$, montrer que

$$0 \leqslant H_k(\mathbf{p}) \leqslant \ln k.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, et tout $\mathbf{p} \in \mathcal{A}_n$, on a : $0 \leqslant H_n(\mathbf{p}) \leqslant \ln(n)$.

II-2. Soient $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ dans $\mathcal{A}_n$, et $\lambda \in [0, 1]$. Vérifier que le vecteur $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}$ appartient aussi à $\mathcal{A}_n$, et montrer (en utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x \ln x$) que

$$H_n(\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}) \geqslant \lambda H_n(\mathbf{p}) + (1-\lambda) H_n(\mathbf{q}).$$

II-3.a. Pour $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ dans $\mathcal{A}_n$ et $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_m)$ dans $\mathcal{A}_m$, on note $\mathbf{p.q}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{nm}$ défini par $\mathbf{p.q} = (p_1q_1, \ldots, p_1q_m, p_2q_1, \ldots, p_2q_m, \ldots, p_nq_1, \ldots, p_nq_m)$. Vérifier que $\mathbf{p.q}$ appartient à $\mathcal{A}_{nm}$ et que

$$H_{nm}(\mathbf{p.q}) = H_n(\mathbf{p}) + H_m(\mathbf{q}).$$

II-3.b. Soit $n \geqslant 3$ et $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ dans $\mathcal{A}_n$ tel que $p_1 + p_2 > 0$. Vérifier que

$$H_n(p_1, ..., p_n) = H_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, ..., p_n) + (p_1 + p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

II-4. Soient $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ et $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ deux éléments distincts de $\mathcal{A}_n$. On suppose de plus que pour tout i, $q_i > 0$, et on définit alors l'*entropie relative* de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ par

$$D_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des indices i entre 1 et n tels que $p_i \geqslant q_i$. On pose alors $\tilde{p} = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i$ et $\tilde{q} = \sum_{i \in \mathcal{I}} q_i$.

II-4.a. Montrer que $\mathcal{I}$ est non vide et de cardinal strictement inférieur à n. Puis montrer, à l'aide de la convexité de la fonction $x \mapsto -\ln x$, que pour tout sous-ensemble $\mathcal{J}$ non vide de $\{1, \ldots, n\}$, on a :

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \geqslant \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} p_i\right) \ln \frac{\sum_{i \in \mathcal{J}} p_i}{\sum_{i \in \mathcal{J}} q_i}.$$

En déduire alors que

$$D_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geqslant \tilde{p} \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} + (1 - \tilde{p}) \ln \frac{1 - \tilde{p}}{1 - \tilde{q}}.$$

II-4.b. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| = 2(\tilde{p} - \tilde{q}).$$

II-4.c. A l'aide d'une étude de la fonction $t \mapsto \tilde{p}\ln t + (1-\tilde{p})\ln(1-t)$, montrer que

$$D_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|\right)^2.$$

II-5. Soit une suite de fonctions $J_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}^+$, définie pour $n \geqslant 2$, et vérifiant les propriétés suivantes :
(P1) Continuité : la fonction $p \mapsto J_2(p, 1-p)$ est continue sur $[0,1]$.
(P2) Symétrie : $\forall n \geqslant 2$, $\forall \sigma$ permutation de $\{1,\ldots,n\}$, et $\forall \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathcal{A}_n$,

$$J_n(p_1,\ldots,p_n) = J_n(p_{\sigma(1)},\ldots,p_{\sigma(n)}).$$

(P3) Maximalité : $\forall n \geqslant 2,\ \forall \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathcal{A}_n,\ J_n(p_1,\ldots,p_n) \leqslant J_n(1/n,\ldots,1/n)$.
(P4) Extensibilité : $\forall n \geqslant 2,\ \forall \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathcal{A}_n,\ J_{n+1}(p_1,\ldots,p_n,0) = J_n(p_1,\ldots,p_n)$.
(P5) Additivité : $\forall n,m \geqslant 2,\ \forall \mathbf{p} \in \mathcal{A}_n,\ \forall \mathbf{q} \in \mathcal{A}_m,\ J_{nm}(\mathbf{p}.\mathbf{q}) = J_n(\mathbf{p}) + J_m(\mathbf{q})$.
(P6) Récursivité : $\forall n \geqslant 3,\ \forall \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathcal{A}_n$ tel que $p_1 + p_2 > 0$,

$$J_n(p_1,\ldots,p_n) = J_{n-1}(p_1+p_2,p_3,\ldots,p_n) + (p_1+p_2)J_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

II-5.a. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $\psi(n) = J_n(1/n,\ldots,1/n)$. Montrer que la suite$(\psi(n))_{n\geqslant 2}$ est croissante, et que pour tous les entiers $n,m \geqslant 2$, on a $\psi(nm) = \psi(n) + \psi(m)$.

II-5.b. On pose dans toute la suite $c = \psi(2)/\ln 2$. Montrer tout d'abord que si $c = 0$ alors $\psi(n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. On suppose maintenant $c \neq 0$. Soit un entier $n > 2$. En encadrant, pour tout entier r non nul, n^r entre des puissances de 2, montrer que $\psi(n) = c\ln(n)$.

II-5.c. Montrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ que pour tout $(p_1,p_2) \in \mathcal{A}_2$ tel que $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$, et tous $(q_1,\ldots,q_n)$ et $(r_1,\ldots,r_n)$ dans $\mathcal{A}_n$, on a :

$$J_{2n}(p_1q_1,\ldots,p_1q_n,p_2r_1,\ldots,p_2r_n) = J_2(p_1,p_2) + p_1J_n(q_1,\ldots,q_n) + p_2J_n(r_1,\ldots,r_n).$$

II-5.d. Soient k et n deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n-2$, montrer que

$$\psi(n) = J_2\left(\frac{k}{n}, 1-\frac{k}{n}\right) + \left(1-\frac{k}{n}\right)\psi(n-k) + \frac{k}{n}\psi(k).$$

Puis en déduire que pour tout $p \in [0,1]$, on a

$$J_2(p,1-p) = cH_2(p,1-p) = -c[p\ln p + (1-p)\ln(1-p)].$$

II-5.e. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$, on a $J_n = cH_n$.

Partie III

Dans cette partie on notera $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, continues et telles que la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
On notera de plus $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ qui sont à support compact.

III-1. Pour tout f appartenant à $\mathcal{F}$, on définit l'*entropie différentielle* de f par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx.$$

Montrer que cette intégrale est bien définie.

III-2. Soient μ un réel et σ un réel strictement positif. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g_{\mu,\sigma}$ par

$$g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Montrer que $g_{\mu,\sigma}$ appartient à $\mathcal{F}$, et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_{\mu,\sigma}(x)dx = \mu \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 g_{\mu,\sigma}(x)dx = \sigma^2.$$

En déduire la valeur de $H(g_{\mu,\sigma})$.

III-3.a. Soit $f \in \mathcal{F}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$. Pour tout μ réel et tout σ réel strictement positif, on pose

$$K_{\mu,\sigma}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln \frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)} dx.$$

Montrer que cette quantité est bien définie, et montrer de plus, à l'aide de la convexité de la fonction $t \mapsto -\ln t$, que $K_{\mu,\sigma}(f) \geqslant 0$.

III-3.b. En déduire que si on définit les réels m et s par $m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ et $s = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx}$, alors

$$H(f) \leqslant H(g_{m,s}).$$

Partie IV

On reprend dans cette partie les notations des parties précédentes.

IV-1.a. Soit $f \in \mathcal{F}$. Pour tout réel $r \in]1/2, +\infty[$, et $r \neq 1$, on définit l'*entropie de Renyi d'ordre* r de f par

$$h_r(f) = \frac{1}{1-r} \ln \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^r(x)dx \right).$$

Montrer que cette quantité est bien définie. La fonction f étant fixée, on considère la fonction F définie sur $]1/2, +\infty[$ par $r \mapsto F(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^r(x)dx$. Montrer que F est de classe C^1, et calculer $F'(1)$.

IV-1.b. En déduire que $h_r(f)$ tend vers $H(f)$ lorsque r tend vers 1.

IV-2.a. Soient f et g dans $\mathcal{F}$. On appelle alors *produit de convolution* de f et de g, que l'on note $f*g$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Justifier la convergence de cette intégrale pour tout x réel.

IV-2.b. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

IV-3.a. On suppose dans la suite que f et g sont dans $\mathcal{F}_0$. Montrer alors que $f*g$ appartient aussi à $\mathcal{F}_0$.

IV-3.b. En utilisant la convexité de la fonction $t \mapsto t\ln t$, montrer que

$$H(f*g) \geqslant H(f).$$

IV-4.a. Soient f et g dans $\mathcal{F}_0$. On admet dans la suite le résultat suivant (inégalité de Young forte) : pour tous p, q, r réels strictement supérieurs à 1, tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, alors

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)^r(x)dx\right)^{1/r} \leqslant \left(\frac{C(p)C(q)}{C(r)}\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x)dx\right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^q(x)dx\right)^{1/q},$$

où pour tout $x > 1$, on a posé $C(x) = \exp(\frac{1}{x}\ln x + \frac{x-1}{x}\ln\frac{x-1}{x})$.

Soit $r \in]1,+\infty[$ et $\lambda \in]0,1[$. On pose $p = \frac{r}{r+\lambda(1-r)}$ et $q = \frac{r}{r+(1-\lambda)(1-r)}$, montrer que

$$h_r(f*g) \geqslant \lambda h_p(f) + (1-\lambda)h_q(g) + \frac{1}{2}H_2(\lambda,1-\lambda) + \frac{r}{2(r-1)}\left(\frac{1}{r}\ln r - \frac{1}{p}\ln p - \frac{1}{q}\ln q\right).$$

IV-4.b. On fixe $\lambda \in]0,1[$. En faisant tendre r vers 1 dans l'inégalité ci-dessus, montrer que

$$H(f*g) \geqslant \lambda H(f) + (1-\lambda)H(g) + \frac{1}{2}H_2(\lambda,1-\lambda).$$

IV-4.c. Utiliser le résultat de la question précédente avec λ choisi de façon optimale pour en déduire que

$$\exp(2H(f*g)) \geqslant \exp(2H(f)) + \exp(2H(g)).$$