Agrégation interne, 2006-2007.

Autour des séries...

Rayon de convergence d'une série entière.

Quand on vous demande de calculer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{C}$), vous devez faire appel à la formule d'Hadamard:

$$R \;=\; \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}\;,$$

ou bien au critère de Cauchy:

$$R \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

quand cette limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (remarquez que la formule d'Hadamard est une généralisation de ce critère car la limite supérieure existe toujours), ou encore au critère de d'Alembert:

$$R \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

quand ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Une remarque qui est toujours valable et parfois utile: si la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour un certain $x \in \mathbb{C}$, alors $R \geq |x|$.

Pour ce qui est de l'étude de la convergence sur le bord $\{x \,:\, |x| = R\}$ du disque (ou de l'intervalle) de convergence, vous devez savoir que tous les cas sont possibles (la série peut ne converger en aucun point du bord, ou seulement en certains points, ou en tous les points). Pour l'une des valeurs $x = \pm R$, on fait souvent appel au théorème des séries alternées pour prouver la convergence (quand il est applicable!)...

Séries alternées et transformation d'Abel.

Le théorème des séries alternées s'énonce ainsi:

> **Théorème des séries alternées.**
> *Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroit vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ converge. De plus, le reste*
>
> $$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$$
>
> *est du signe de $(-1)^{n+1}$, et on a $|R_n| \leq v_{n+1}$.*

Lorsque vous appliquez ce théorème, vous devez donc vérifier que $(v_n)_{n\geq 0}$ est *décroissante* ET *tend vers* 0. Remarquez que cette dernière condition est nécessaire car si la série converge, son terme général tend vers $0\ldots$

En fait ce théorème peut être obtenu comme cas particulier de la tranformation d'Abel, qui consiste à mener le calcul suivant:

$$\begin{aligned}\sum_{i=p}^{r}(u_i - u_{i-1})v_i &= \sum_{i=p}^{r} u_i v_i - \sum_{i=p}^{r} u_{i-1}v_i = \sum_{i=p}^{r} u_i v_i - \sum_{i=p-1}^{r-1} u_i v_{i+1} \\ &= u_r v_r - u_{p-1}v_p - \sum_{i=p}^{r-1} u_i(v_{i+1} - v_i)\end{aligned}$$

Cette transformation est souvent considérée comme une version discrète de la formule d'intégration par parties

$$\int_p^r u'(x)v(x)dx = u(r)v(r) - u(p)v(p) - \int_p^r u(x)v'(x)dx$$

où la somme $\sum$ remplace l'intégrale $\int$, et la "différence finie" $u_{i+1} - u_i$ remplace la dérivation $u'(x)$. Ceci explique que cette transformation soit importante dans l'étude des séries.
Remarque: il n'est pas question d'apprendre la formule de la transformation d'Abel par coeur, il faut juste connaître cette transformation (le petit calcul qui y conduit) pour pouvoir l'appliquer au moment opportun.
Une des applications classiques de la transformation d'Abel est la suivante: si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est bornée et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
Evidemment le théorème des séries alternées est un cas particulier de ce dernier résultat puisque $u_i = (-1)^i$, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$, qui ne prend que les valeurs 0 et 1, est bornée, et la suite $(v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.
Voyons d'ailleurs comment fonctionne la preuve utilisant la transformation d'Abel dans ce cas précis:

Démonstration de la convergence des séries alternées. On définit la suite $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$, on remarque que pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n = U_n - U_{n-1}$, donc en appliquant la transformation d'Abel aux suites $(U_n)_n$ et $(v_n)_n$, on obtient pour $r > p \geq 1$:

$$\sum_{i=p}^{r} u_i v_i = \sum_{i=p}^{r}(U_i - U_{i-1})v_i = U_r v_r - U_{p-1}v_p - \sum_{i=p}^{r-1} U_i(v_{i+1} - v_i).$$

Or comme on l'a vu, U_n prend pour seules valeurs les nombres 0 et 1, par conséquent on a $|U_n| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$ donc

$$\left|\sum_{i=p}^{r} u_i v_i\right| \leq |v_r| + |v_p| + \sum_{i=p}^{r-1} |v_{i+1} - v_i|.$$

Puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante, on a $|v_{i+1} - v_i| = v_i - v_{i+1}$ pour tout i, et comme elle tend vers 0 elle est positive, donc

$$\left|\sum_{i=p}^{r} u_i v_i\right| \;\leq\; |v_r|+|v_p|+\sum_{i=p}^{r-1}(v_i - v_{i+1}) \;=\; v_r+v_p+(v_p-v_r) \;=\; 2v_p.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{i=0}^{n} u_i v_i$ est une suite de Cauchy et donc converge: en effet, d'après ce qui précède on a

$$\forall r > p \geq 1, \qquad |S_r - S_{p-1}| \;=\; \left|\sum_{i=p}^{r} u_i v_i\right| \;\leq\; 2v_p,$$

donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, puisque $(v_n)_n$ décroît vers 0 il existe un rang $P \geq 1$ tel que $v_p < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $p \geq P$, et donc

$$\forall r > p \geq P, \qquad |S_r - S_{p-1}| \;<\; \varepsilon.$$

La preuve ci-dessus est en fait assez représentative des techniques de preuve utilisant la transformation d'Abel, à titre d'exercice, je vous propose de démontrer les résultats suivants:

- si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est bornée et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum u_n v_n$ converge;
- si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est bornée, que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 et que la série $\sum |v_{n+1} - v_n|$ converge, alors la série $\sum u_n v_n$ converge;
- si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est convergente et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et à valeurs positives, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Remarquez que le théorème des séries alternées est un cas particulier des deux premiers énoncés, mais pas du troisième.