Préparation au CAPES 2010-2011.

Le laplacien discret.

Introduction et notations.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, $id_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application identité et I_n sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans tout le problème, N et K sont deux nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.

Dans la première partie de ce problème, on étudie le sous-espace vectoriel H_N^1 de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$v \in H_N^1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{2, \dots, N-1\} \qquad v_i = \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2}.$$

Un élément v de H_N^1 sera dit *harmonique.*

Dans la deuxième partie de ce problème, on note J le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par

$$J := (\{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, K\}) \setminus \{(1,1), (1,K), (N,1), (N,K)\}.$$

On note E l'espace vectoriel des familles de nombres réels $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J}$. Un élément $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J}$ de E sera représenté par une matrice $N \times K$ privée de ses quatres “coins”:

$$A = \begin{bmatrix} & a_{1,2} & \dots & a_{1,K-1} & \\ a_{2,1} & \dots & \dots & \dots & a_{2,K} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{N-1,1} & \dots & \dots & \dots & a_{N-1,K} \\ & a_{N,2} & \dots & a_{N,K-1} & \end{bmatrix}.$$

Un élément de E sera appelé *matrice écornée.*
On étudie alors le sous-espace vectoriel $H_{N,K}^2$ de E défini par

$$A \in H_{N,K}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (i,j) \in I \qquad a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}$$

où I est le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par

$$I := \{2, \dots, N-1\} \times \{2, \dots, K-1\}$$

Un élément A de $H_{N,K}^2$ sera dit *harmonique* (ou *matrice écornée harmonique*).

A. Approche algèbrique.

A.1. Soit $f_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ l'application linéaire qui à un vecteur $v \in \mathbb{R}^N$ associe le vecteur $f_N(v)$ ayant pour coordonnées:

$$\begin{cases} f_N(v)_1 = v_1, \\ \forall i \in \{2, \dots, N-1\} \qquad f_N(v)_i = \dfrac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2}, \\ f_N(v)_N = v_N \end{cases}$$

A.1.a. Préciser le lien entre $f_N - id_N$ et H_N^1.

A.1.b. Ecrire la matrice F_N de f_N dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
Préciser les cas particuliers F_3 et F_4.

A.1.c. Calculer le déterminant de $F_N - I_N$.

A.2. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \frac{3}{4}, \\ \forall n \geq 1 \qquad x_{n+2} = -x_{n+1} - \dfrac{1}{4}x_n. \end{cases}$$

A.2.a. Exprimer x_n en fonction de n et en déduire que x_n ne s'annule pas.

A.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que le déterminant de la matrice G_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$G_n := \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

est non nul. *Remarque:* on a $G_1 := [-1]$ et $G_2 := \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

A.3. Déduire de ce qui précède le rang de la matrice $F_N - I_N$, puis la dimension de H_N^1.

A.4. A un vecteur v de $\mathbb{R}^N$ on associe la famille $V := \{(i, v_i) : i = 1, \dots, N\}$ de points de $\mathbb{R}^2$.

A.4.a. Démontrer qu'un vecteur v est harmonique si et seulement si les points de la famille V associée sont alignés.

A.4.b. Quels sont les vecteurs harmoniques $v \in \mathbb{R}^N$ pour lesquels $v_1 = v_N = 0$?

A.4.c. Soit deux nombres réels α et β. Donner l'unique vecteur harmonique $v \in \mathbb{R}^N$ pour lequel $v_1 = \alpha$ et $v_N = \beta$.

A.4.d. Donner une base de H_N^1.

B. Approche probabiliste.

Dans la partie I.B., on étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

> **Définition.** Une marche aléatoire $(S_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ sur $\mathbb{Z}$ est la donnée d'une suite $(X_i^S)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur un même univers probabilisé (Ω, P), deux à deux indépendantes, de même loi
>
> $$\forall i \geq 1 \qquad P(X_i^S = -1) = P(X_i^S = 1) = \frac{1}{2}$$
>
> et à laquelle on associe la famille de variables aléatoires $(S_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ définie par
>
> $$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 1 \qquad S_n^j := j + \sum_{i=1}^{n} X_i^S.$$

Ainsi, la variable aléatoire S_n^j est la position, au bout de n pas d'amplitude 1, d'un marcheur partant de la position j et marchant au hasard. Pour trois entiers relatifs j, k, l deux à deux distincts tels que $\min\{k, l\} < j < \max\{k, l\}$ on définit également l'évènement

$$C_S(j, k, l) := \left\{\omega \in \Omega \,:\, \exists n \geq 1 \quad (S_n^j(\omega) = k \quad et \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad S_n^j(\omega) \neq l)\right\}.$$

L'évènement $C_S(j, k, l)$ correspond au fait que le marcheur partant de la position j passe par la position k sans être passé précédemment par la position l.

On admettra les résultats suivants concernant les marches aléatoires:

(R1) Pour tous les triplets d'entiers relatifs j, k, l deux à deux distincts et tels que $\min\{k, l\} < j < \max\{k, l\}$ on a

$$P(C_S(j,k,l)) + P(C_S(j,l,k)) \;=\; 1.$$

(R2) Si $(S_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ et $(\sigma_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ sont deux marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ alors pour tous les triplets d'entiers relatifs j, k, l deux à deux distincts et tels que $\min\{k, l\} < j < \max\{k, l\}$ on a

$$P(C_S(j,k,l)) \;=\; P(C_\sigma(j,k,l)).$$

Dans toute cette partie, $(S_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

B.1. Donner une interprétation succincte du résultat (R1).

B.2. Soit $j \in \mathbb{Z}$, calculer $P(C_S(j, j-1, j+1))$ et $P(C_S(j, j+1, j-1))$.

B.3. On définit la famille de variables aléatoires $(\sigma_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ par

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 1 \qquad \sigma_n^j \;:=\; j + \sum_{i=1}^{n} X_{i+1}^S \;=\; j + \sum_{i=2}^{n+1} X_i^S\,.$$

B.3.a. Démontrer que $(\sigma_n^j)_{j\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

B.3.b. Soit j, l deux entiers relatifs tels que $j < l + 1$. Montrer que

$$P(C_S(j, j-1, l)) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(C_\sigma(j+1, j-1, l)).$$

Donner une relation entre $P(C_S(j, j-1, l))$ et $P(C_S(j+1, j-1, l))$.

B.3.c. Soit j, k, l des entiers relatifs tels que $k + 1 < j < l + 1$. Montrer que

$$P(C_S(j,k,l)) \;=\; \frac{P(C_S(j+1,k,l)) + P(C_S(j-1,k,l))}{2}\,.$$

B.4. Soit $j \in \{2, \ldots, N-1\}$, on définit la variable aléatoire Y_j sur Ω par

$$Y_j(\omega) \;:=\; \begin{cases} 0 & si \;\; \omega \in C_S(j,1,N), \\ 1 & si \;\; \omega \in C_S(j,N,1). \end{cases}$$

On définit aussi les variables aléatoires constantes $Y_1 := 0$ et $Y_N := 1$.

(remarque: en fait les v.a. Y_j sont définies sur $C_S(j,1,N) \cup C_S(j,N,1)$ qui est de probabilité 1 grâce à (R1); on les considèrera cependant comme bien définies sur Ω.)

B.4.a. Préciser la loi de Y_2 lorsque $N = 3$.

B.4.b. Soit $j \in \{2, \ldots, N-1\}$. En utilisant B.3., trouver une relation liant les espérances $\mathbb{E}(Y_{j-1})$, $\mathbb{E}(Y_j)$ et $\mathbb{E}(Y_{j+1})$.

B.5. Soit deux nombres réels α et β. On définit la famille de variables aléatoires réelles $(Z_i)_{1\leq i\leq N}$ par

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \qquad Z_i \;:=\; \alpha + (\beta - \alpha) Y_j.$$

On associe à cette famille le vecteur $v := (\mathbb{E}(Z_1), \ldots, \mathbb{E}(Z_N))$.

B.5.a. Démontrer que v est harmonique.

B.5.b. En utilisant A.4.c., calculer $P(C_S(j,1,N))$ pour tout $j \in \{2, \ldots, N-1\}$.

Partie II: cas de la dimension 2.

A. Approche algèbrique.

A.0. Dans cette question uniquement, on suppose $N = 3$ et $K = 4$. Parmis les matrices écornées suivantes, désigner celles qui sont harmoniques:

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}.$$

A.1. *Dans toute cette question, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J}$ est une matrice écornée harmonique.*

A.1.a. Soit $(i, j) \in I$, à quelle condition sur les nombres $a_{i,j}, a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j-1}, a_{i,j+1}$ a-t'on $a_{i,j} = \max\{a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j-1}, a_{i,j+1}\}$?

A.1.b. Démontrer que

$$\max\{a_{i,j} \,:\, (i,j) \in I\} \leq \max\{a_{i,j} \,:\, (i,j) \in J \setminus I\}.$$

Indication: on pourra faire une preuve par l'absurde et considérer l'indice

$$k := \min\{i \,:\, \exists (i,j) \in I \quad a_{i,j} = \alpha\}$$

où $\alpha := \max\{a_{i,j} \,:\, (i,j) \in I\}$.

A.1.c. Démontrer que

$$\min\{a_{i,j} \,:\, (i,j) \in I\} \geq \min\{a_{i,j} \,:\, (i,j) \in J \setminus I\}.$$

A.1.d. On suppose que $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in J \setminus I$. Démontrer que tous les coefficients de A sont nuls.

A.2. On définit l 'application linéaire $g : E \to E$ de la manière suivante: si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J} \in E$, son image $g(A)$ est la matrice écornée donnée par

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in J \setminus I & g(A)_{i,j} = a_{i,j}, \\ \forall (i,j) \in I & g(A)_{i,j} = a_{i,j} - \dfrac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}. \end{cases}$$

A.2.a. Démontrer que le noyau de g est inclus dans $H^2_{N,K}$.

A.2.b. En utilisant les résultats de la question A.1., montrer que g est injective.

A.2.c. Déduire de la question précédente que pour toute famille de nombres réels $(b_{i,j})_{(i,j)\in J\setminus I}$ il existe une unique matrice écornée harmonique $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J}$ telle que

$$\forall (i,j) \in J \setminus I \qquad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

A.2.d. Donner la dimension de $H^2_{N,K}$.

B. Approche numérique.

Dans cette partie, on fixe une famille de nombres réels $(b_{i,j})_{(i,j)\in J\setminus I}$ et on note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J}$ l'unique matrice écornée harmonique (voir A.2.c) telle que

$$\forall (i,j) \in J \setminus I \qquad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

On étudie un méthode numérique itérative permettant d'obtenir A.

On note E_b le sous-espace affine de E formé par les matrices écornées $D = (d_{i,j})_{(i,j)\in J}$ telles que

$$\forall (i,j) \in J \setminus I \qquad d_{i,j} = b_{i,j}.$$

On remarque que $A \in E_b$.

On définit l 'application linéaire $h : E \to E$ de la manière suivante: si $D = (d_{i,j})_{(i,j)\in J} \in E$, son image $h(D)$ est la matrice écornée donnée par

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in J \setminus I & h(D)_{i,j} = d_{i,j}, \\ \forall (i,j) \in I & h(D)_{i,j} = \dfrac{d_{i-1,j} + d_{i+1,j} + d_{i,j-1} + d_{i,j+1}}{4}. \end{cases}$$

On définit une suite récurrente $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E_B de la manière suivante:

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in J \setminus I & (A_0)_{i,j} = b_{i,j}, \\ \forall (i,j) \in I & (A_0)_{i,j} = 0 \end{cases}$$

et $A_{n+1} := h(A_n)$ pour tout $n \geq 0$.

On munit de plus E de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall D \in E, \qquad \|D\|_\infty := \max\{|d_{i,j}| \, : \, (i,j) \in J\}.$$

On admettra que cette application de E dans $\mathbb{R}_+$ est une norme sur E.

B.0. Dans cette question seulement, on considère le cas particulier $N = 3$, $K = 4$, $b_{1,2} = 1$, $b_{1,3} = 2$, $b_{2,1} = 0$, $b_{2,4} = 0$, $b_{3,2} = 2$, $b_{3,3} = 1$. La matrice écornée A_0 correspondante est donc

$$A_0 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}.$$

Calculer $A_1 := h(A_0)$, $A_2 := h(A_1)$ et $A_3 := h(A_2)$.

B.1. Démontrer que A est l'unique point fixe de h sur E_b.

B.2.a. Montrer que

$$\forall D \in E \qquad \|h(D - A)\|_\infty \leq \|D - A\|_\infty.$$

B.2.b. En déduire que la suite $(\|A_n - A\|_\infty)_{n\geq 0}$ est décroissante.
Montrer alors qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \geq 0 \qquad \|A_n\|_\infty \leq M.$$

B.3.a. Montrer que si $D \in E_b$ et $D \neq A$ alors $\|h(D - A)\|_\infty < \|D - A\|_\infty$.
Indication: on pourra utiliser un raisonnement analogue à celui de la question A.1.b.

B.3.b. Montrer que

$$\forall \alpha \in]0, M] \quad \exists \beta \,]0,1[\quad \forall D \in E_b \qquad \|D - A\|_\infty \in [\alpha, M] \;\Rightarrow\; \|h(D - A)\|_\infty \leq \beta \|D - A\|_\infty.$$

Indication: on utilisera la compacité de $\{D \in E_b \, : \, \|D - A\|_\infty \in [\alpha, M]\}$.

B.3.c. Montrer que la suite $(\|A_n - A\|_\infty)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

FIN.