Quelques corrections

Exercice 1.3.
On démontre par l'absurde que $l = 1$.
On commence par supposer $l < 1$. Soit $\alpha \in]l, 1[$, alors il existe $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad f(n) \, < \, \alpha \, n.$$

Soit alors n un entier tel que $(1 - \alpha) \, n > N$. On remarque que

$$f(\{N, \ldots, n\}) \, \subset \, \{0, \ldots, [\alpha \, n]\} \, \subset \, \{0, \ldots, n - N - 1\}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Puisque f est injective, l'ensemble de gauche comprend $n - N + 1$ éléments, or l'ensemble de droite en contient $n - N$, d'où une contradiction.
On suppose maintenant $l > 1$. Soit $\alpha \in]1, l[$, alors il existe $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad f(n) \, > \, \alpha \, n.$$

Soit alors $n \geq N$ un entier tel que $(\alpha - 1) \, n > 1$. On remarque que si $k \geq n$ alors

$$f(k) \, > \, \alpha \, k \, \geq \, \alpha n \, > \, n + 1.$$

On en déduit que

$$f(\{k \, : \, k \geq n\}) \, \subset \, \{k \, : \, k \geq n + 2\}.$$

Puisque f est surjective, on sait que $\{0, \ldots, n + 1\} \subset f(\mathbb{N})$, et ce qui précède implique donc

$$\{0, \ldots, n + 1\} \, \subset \, f(\{0, \ldots, n - 1\}).$$

Ceci amène encore à une contradiction puisque l'ensemble de gauche comporte $n + 2$ éléments et l'ensemble de droite au plus n.

Exercice 3.1.
On remarque d'abord que S_n est le coefficient de la série entière obtenue comme produit des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum x^n$. Comme ces deux séries ont pour rayon de convergence 1, on en conclut que la série $\sum S_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$. Reste à démontrer que $R = 1$. On utilise pour cela la formule d'Hadamard

$$R \, = \, \frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} |S_n|^{\frac{1}{n}}} \, .$$

Si on suppose que $R > 1$, on peut choisir α, β tels que $1 < \alpha < \beta < R$. D'après la formule de Hadamard, on peut alors trouver un rang $N > 0$ tel que

$$(H) \qquad \forall n \geq N, \qquad |S_n|^{\frac{1}{n}} \leq \beta^{-1}.$$

D'autre part, la formule de Hadamard appliquée à la série $\sum a_n x^n$ donne

$$\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > \alpha^{-1}.$$

Comme de plus $(\frac{\beta}{\alpha})^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, on peut trouver $n \geq N + 1$ tel que $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \alpha^{-1}$ et $(\frac{\beta}{\alpha})^n > \beta + 1$. On peut alors écrire

$$|S_n| = |S_{n-1} + a_n| \geq |a_n| - |S_{n-1}| > \alpha^{-n} - \beta^{-n+1} > \beta^{-n}$$

ce qui contredit (H).