Agrégation interne, 2006-2007.
Sujet 2.
Remarques sur la correction distribuée en cours.

PARTIE I

2)c) Comme indiqué dans l'énoncé, on doit trouver $S = T + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

3) L'intégrablité de φ est bien justifiée, je veux juste revenir sur la fin de l'argument.
Le problème est de réaliser l'interversion série-intégrale

$$(A) \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} u_k(x)dx \;=\; \int_2^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(x)dx.$$

Pour cela, il vous suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite de functions $f_n(x) := \sum_{k=2}^{n} u_k(x)$. En effet, on a pour tout $x \geq 2$

$$\forall n \geq 2, \qquad |f_n(x)| \;=\; \left|\sum_{k=2}^{n} u_k(x)\right| \;=\; \frac{[x]}{x^3}\left|\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k x^{-k}\right|$$

et donc

$$\forall n \geq 2, \qquad |f_n(x)| \;=\; \frac{[x]}{x^3}\left|\frac{1-\left(-\frac{1}{x}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{x}}\right| \;\leq\; 4\,\frac{[x]}{x^3} \;\leq\; \frac{4}{x^2} =: g(x).$$

La fonction g étant intégrable sur $[2,+\infty[$ et la suite $(f_n)_n$ convergeant simplement sur $[2,+\infty[$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^{+\infty} f_n(x)dx \;=\; \int_2^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

ce qui donne exactement (A). Enfin le corrigé de cette question se termine par une faute de frappe puisqu'on obtient évidemment

$$T \;=\; \int_2^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

4)b) On mène les calculs proposés dans la correction, sauf qu'on ne doit pas faire la/les même(s) erreur(s) et obtenir $T = H - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ (je n'ai pas cherché où la correction est fausse), ce qui fait qu'on obtient bien $S = H$ comme demandé dans l'énoncé.

4)c) On déduit de la question précédente et de la correction que $F(1) = S = \gamma$.

PARTIE II

1)a) Pour le rayon de convergence, on peut appliquer directement le critère de d'Alembert ou de Cauchy. C'est le réflexe à avoir (plutôt que la justification floue de la correction).

3)a) Le correcteur ne fait vraiment pas une majoration optimale!!! Il obtient très vite:

$$(B) \qquad \forall u \in]-1,0], \qquad 0 \ \leq \ u - \ln(1+u) \ \leq \ \frac{u^2}{2(1-u)^2}.$$

Il est bien mal inspiré de se restreindre au cas $u \in]-A,0]$ pour continuer, car quand $n \to +\infty$ on a $\frac{x}{n} \to 0$. Si on utilise directement l'inégalité ci-dessus pour $\frac{x}{n}$ on obtient

$$\forall x \in]-A,0], \forall n \geq 2, \qquad 0 \ \leq \ \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \ \leq \ \frac{x^2}{2(n-x)^2} \ \leq \ \frac{1}{2(n-1)^2}.$$

(dans la majoration précédente je ne m'occupe pas du cas $n = 1$ car le(s) premier(s) terme(s) d'une série ne détermine(nt) pas la convergence ou non de cette série). On conclut alors rapidement que la série converge normalement.

PARTIE III

2)c) On utilise la formule trouvée au 2)b) pour calculer $G(\frac{1}{2})$ puis la formule du II.4 pour conclure.