Agrégation interne, 2006-2007.
Sujet 1.
Correction.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

a) On démontre par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété

$$f^n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \qquad et \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^n)'(x) = \prod_{0 \leq i \leq n-1} f'(f^i(x)).$$

Pour $n = 1$ la propriété découle des hypothèses sur f et de la convention adoptée pour f^0.
Soit $n \geq 1$, on suppose la propriété vérifiée au rang n, alors f^n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f^{n+1} = f \circ f^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction f^n dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus si $x \in \mathbb{R}$ on calcule:

$$\begin{aligned}(f^{n+1})'(x) &= (f \circ f^n)'(x) = f'(f^n(x))(f^n)'(x) \\ &= f'(f^n(x)) \prod_{0 \leq i \leq n-1} f'(f^i(x)) = \prod_{0 \leq i \leq n} f'(f^i(x)).\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$, ce qui conclut la preuve.

b) Soit x_0 un point périodique attractif de f de période q et $i \in \{1, \ldots, q-1\}$ (il n'y a rien à démontrer dans le cas $i = 0$). On remarque que $f^i(x_0)$ est un point périodique de f de période r inférieure ou égale à q puisque

$$f^q(f^i(x_0)) = f^{q+i}(x_0) = f^{i+q}(x_0) = f^i(f^q(x_0)) = f^i(x_0).$$

Comme $f^r(f^i(x_0)) = f^i(x_0)$ et $i \leq q-1$, en appliquant f^{q-i} à cette égalité on obtient

$$f^r(x_0) = f^{q-i}(f^r(f^i(x_0))) = f^{q-i}(f^i(x_0)) = f^q(x_0) = x_0.$$

Comme q est la période de x_0, on obtient $r \geq q$ et donc $r = q$, donc $f^i(x_0)$ est un point périodique de f de période q. C'est un point périodique attractif de f car

$$\begin{aligned}(f^q)'(f^i(x_0)) &= \prod_{0 \leq j \leq q-1} f'(f^j(f^i(x_0))) = \prod_{0 \leq j \leq q-1} f'(f^{j+i}(x_0)) \\ &= \prod_{i \leq j \leq q-1} f'(f^j(x_0)) \times \prod_{0 \leq j \leq i-1} f'(f^{j+q}(x_0)) \\ &= \prod_{i \leq j \leq q-1} f'(f^j(x_0)) \times \prod_{0 \leq j \leq i-1} f'(f^j(x_0)) \\ &= \prod_{0 \leq j \leq q-1} f'(f^j(x_0)) = (f^q)'(x_0)\end{aligned}$$

donc $|(f^q)'(f^i(x_0))| = |(f^q)'(x_0)| < 1$ car x_0 est un point périodique attractif.
On montre enfin que x_0 et $f^i(x_0)$ ont la même orbite:

$$\begin{aligned}O(f^i(x_0)) &= \{f^j(f^i(x_0)) \,:\, 0 \leq j \leq q-1\} \\ &= \{f^j(x_0) \,:\, i \leq j \leq q-1\} \cup \{f^j(f^q(x_0)) \,:\, 0 \leq j \leq i-1\} = O(x_0).\end{aligned}$$

PARTIE I

1)a) On remarque que quand $c > \frac{1}{4}$, on a

$$(A) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_c(x) - x \ = \ x^2 - x + c \ > \ x^2 - x + \frac{1}{4} \ = \ (x - \frac{1}{2})^2 \ \geq \ 0.$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$, on déduit de ce qui précède que la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ est strictement croissante, donc soit elle tend vers $+\infty$, soit elle a une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Dans ce deuxième cas, on déduit de la continuité de f_c que

$$f_c(l) \ = \ f_c(\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x)) \ = \ \lim_{n\to+\infty} f_c^{n+1}(x) = l$$

donc l est un point fixe de f. Or f n'a pas de point fixe en raison de (A). On obtient donc que $\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On remarque que si x_0 est un point périodique de f_c, alors la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans l'orbite de x_0, qui est un ensemble fini donc borné: la fonction f_c n'a donc pas de point périodique.

1)b) De la même façon que pour (A), on obtient

$$(B) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{\frac{1}{4}}(x) - x \ = \ x^2 - x + \frac{1}{4} \ = \ (x - \frac{1}{2})^2 \ \geq \ 0.$$

Soit x tel que $|x| > \frac{1}{2}$. On déduit de (B) que la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ est croissante, et en particulier

$$\forall n \geq 1, \qquad f_{\frac{1}{4}}^n(x) \ \geq \ f_{\frac{1}{4}}(x) \ = \ f_{\frac{1}{4}}(|x|) \ \geq \ |x| \ > \ \frac{1}{2}$$

où on a utilisé la parité de f. Puisque la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ est croissante, soit elle tend vers $+\infty$, soit elle a une limite finie $l > \frac{1}{2}$ (d'après la série d'inégalités ci-dessus). Le même raisonnement qu'à la question précédente prouve que dans ce dernier cas, l doit être un point fixe de $f_{\frac{1}{4}}$, or d'après (B) le seul point fixe de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{2}$. On en déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{4}}^n(x) = +\infty$.
Soit maintenant x tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$. Puisque $f_{\frac{1}{4}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$\forall y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \qquad f_{\frac{1}{4}}(y) \ = \ f_{\frac{1}{4}}(|y|) \ \in \ [f_{\frac{1}{4}}(0), f_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})] \ \subset \ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

On en déduit que la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ est contenue dans le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et puisqu'elle est croissante elle converge vers une limite l qui d'après ce qui précède ne peut être que $\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{4}}^n(x) = \dfrac{1}{2}$.
Soit x_0 un point périodique de $f_{\frac{1}{4}}$, alors la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans l'orbite de x_0, qui est un ensemble fini: on en déduit que $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et puisque dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{4}}^n(x) = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2}$ est dans l'orbite de x_0. Or $\frac{1}{2}$ est un point périodique d'orbite $\{\frac{1}{2}\}$, et d'après la question préliminaire b) on déduit que x_0 et $\frac{1}{2}$ ont la même orbite, donc $x_0 = \frac{1}{2}$.
Donc $f_{\frac{1}{4}}$ a pour seul point périodique le point $\frac{1}{2}$, dont l'orbite est $\{\frac{1}{2}\}$.

2)a) L'équation $f_c(x) = x$ s'écrit $x^2 - x + c = 0$, le discriminant Δ de cette équation du second degré est $\Delta = 1 - 4c$, qui est strictement positif quand $c < \frac{1}{4}$. Dans ce cas la fonction f_c a donc deux points fixe

$$\beta \; = \; \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} \qquad et \qquad \alpha \; = \; \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$$

et on a évidemment $|\alpha| \leq \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = \beta$.
On remarque de plus que si $x > \beta$ alors

$$f_c(x) - x \; = \; (x-\beta)(x-\alpha) \; > \; 0.$$

Le même raisonnement qu'au 1)b) montre que dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty$.
Ceci est également vrai quand $x < -\beta$: puisque f_c est paire, les suites $(f_c^n(x))_{n\geq 1}$ et $(f_c^n(|x|))_{n\geq 1}$ coincident.

2)b) Je vous laisse tracer le graphe de f_{-1}.

3)a) Puisque f_c est paire, on a $f_c([-\beta,\beta]) = f_c([0,\beta])$, et puisque f_c est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ on a $f_c([0,\beta]) = [f_c(0), f_c(\beta)]$. On en déduit

$$f_c([-\beta,\beta]) \subset [-\beta,\beta] \quad \Leftrightarrow \quad f_c(0) \geq -\beta \quad \Leftrightarrow \quad c \geq -\beta \quad \Leftrightarrow \quad c \geq -2.$$

Si cette inclusion n'est pas vérifiee on a $|f_c(0)| > \beta$, donc d'après la question 2)a) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_c^n(f_c(0)) = +\infty$, ce qui implique bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f_c^n(0) = +\infty$.

3)b) Le point α est un point périodique de période 1 de f_c, donc

$$\alpha \text{ est un point attractif} \quad \Leftrightarrow \quad |f_c'(\alpha)| < 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2|\alpha| < 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; -\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}.$$

3)c) Soit $c \in [0, \frac{1}{4}[$, alors $\alpha \geq 0$.
Soit d'abord $x \in [0,\alpha]$, alors comme on a

$$(C) \qquad \forall y \in [0,\alpha] \qquad f_c(y) - y \; = \; (y-\alpha)(y-\beta) \; \geq \; 0,$$

et $f_c([0,\alpha]) = [f_c(0), f_c(\alpha)] = [0,\alpha]$ (car f_c est continue et croissante sur $[0,\alpha]$), on en déduit que la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers un point fixe de f_c (voir raisonnement du 1)a)), qui ne peut être que α (car ce point fixe appartient à $[0,\alpha]$).
Soit maintenant $x \in [\alpha,\beta[$, alors comme on a

$$(C') \qquad \forall y \in [\alpha,\beta[\qquad f_c(y) - y \; = \; (y-\alpha)(y-\beta) \; \leq \; 0,$$

et $f_c([\alpha,\beta[\,) = [f_c(\alpha), f_c(\beta)[= [\alpha,\beta[$ (car f_c est continue et croissante sur $[\alpha,\beta]$), on en déduit que la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, elle converge donc vers un point fixe de f_c, qui ne peut être que α (car ce point fixe appartient à $[\alpha,x]$ et $x < \beta$).
Puisque f_c est paire, les suites $(f_c^n(x))_{n\geq 1}$ et $(f_c^n(|x|))_{n\geq 1}$ coincident, donc on déduit de ce qui précède que

$$\forall x \in]-\beta,\beta[\qquad \lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = \alpha.$$

De même qu'en 1)b), on en conclut que les seuls points périodiques possibles pour f_c sont les points α et β. On remarque alors que α est un point périodique attractif de période 1 et que β est un point périodique de période 1 qui n'est pas attractif. L'orbite attractive est donc $\{\alpha\}$.

PARTIE II

1)a) Puisque x_0 est un point périodique attractif de période q de f, c'est un point fixe de g (qui est aussi une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question préliminaire a)) et on a $|g'(x_0)| < 1$. Puisque g' est continue en x_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad |g'(y)| \leq K := \frac{|g'(x_0)| + 1}{2} < 1.$$

L'inégalité des accroissements finis permet alors d'obtenir

$$(D) \qquad \forall y, z \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad |g(y) - g(z)| \leq K|y - z| < |y - z|.$$

En particulier, on a

$$\forall y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad |g(y) - x_0| = |g(y) - g(x_0)| \leq K|y - x_0| < |y - x_0| < \varepsilon.$$

On en déduit que si $y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ alors $g(y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, avec de plus $|g(y) - x_0| \leq K|y - x_0|$. On obtient alors facilement par récurrence que

$$\forall y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \forall n \geq 1, \qquad |g^n(y) - x_0| \leq K^n|y - x_0|.$$

Puisque $0 \leq K < 1$, on en déduit que

$$\forall y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad \lim_{n \to +\infty} g^n(y) = x_0.$$

1)b) Soit $x \in U_{x_0}$, on veut montrer que U_{x_0} contient un voisinage ouvert de x. Puisque $x \in U_{x_0}$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^N(x) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. L'application g^N étant continue, l'ensemble $V := (g^N)^{-1}(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[)$ est un ouvert, qui par définition de N contient x. De plus pour tout $y \in V$ on a $g^N(y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ et donc d'après la question précédente $\lim_{n \to +\infty} g^n(y) = x_0$. On en conclut que $V \subset U_{x_0}$, donc U_{x_0} contient un voisinage ouvert de x.

2) On démontre d'abord que I_{x_0} est un intervalle: soit $a, b \in I_{x_0}$, on veut montrer que $[a, b] \subset I_{x_0}$. On sait que a appartient à un intervalle I_a inclus dans U_{x_0} et qui contient x_0, et b appartient à un intervalle I_b inclus dans U_{x_0} et qui contient x_0. On peut supposer sans perte de généralité que $a < b$. Si $a < b \leq x_0$ alors $b \in I_a$ et donc $[a, b] \subset I_a \subset I_{x_0}$. De même si $x_0 \leq a < b$ alors $a \in I_b$ et donc $[a, b] \subset I_b \subset I_{x_0}$. Reste à voir le cas $a \leq x_0 \leq b$: comme $[a, x_0] \subset I_a \subset I_{x_0}$ et $[x_0, b] \subset I_b \subset I_{x_0}$, il vient $[a, b] \subset I_{x_0}$, ce qui termine la preuve.
On démontre que I_{x_0} est ouvert: si $x \in I_{x_0}$, alors $x \in U_{x_0}$ qui est ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset U_{x_0}$. On peut supposer par exemple que $x > x_0$ (le cas $x = x_0$ découle du fait que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I_{x_0}$), dans ce cas

puisque $x \in I_{x_0}$ on sait que $[x_0, x] \subset I_{x_0}$, et donc aussi $]x_0, x+\eta[\subset I_{x_0}$, or $]x_0, x+\eta[$ est un voisinage ouvert de x, ce qui conclut la preuve.

3) L'application g étant continue, $g(\,]a,b[\,)$ est un intervalle. Soit $y \in g(\,]a,b[\,)$, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $g(x) = y$, et par définition de $]a,b[$ on a $\lim_{n \to +\infty} g^n(x) = x_0$. Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} g^n(y) = x_0$, et donc $y \in U_{x_0}$. Ceci étant vrai pour tout $y \in g(\,]a,b[\,)$, on en déduit que l'intervalle $g(\,]a,b[\,)$ est inclus dans U_{x_0}. Enfin $x_0 \in]a,b[$ et $g(x_0) = x_0$ donc $x_0 \in g(\,]a,b[\,)$. Par conséquent, l'intervalle $g(\,]a,b[\,)$ est inclus dans U_{x_0} et contient x_0: par définition de $]a,b[$, on a donc $g(\,]a,b[\,) \subset]a,b[$.
Par continutinuité de g, on a $g(\{a,b\}) \subset \overline{g(\,]a,b[\,)}$, or $\overline{g(\,]a,b[\,)} \subset \overline{]a,b[} = [a,b]$. Démontrons par exemple que $g(a) \notin]a,b[$: en effet dans le cas contraire on a $g(a) \in]a,b[\subset U_{x_0}$, et donc $\lim_{n \to +\infty} g^n(g(a)) = x_0$, d'où on déduit $\lim_{n \to +\infty} g^n(a) = x_0$ et donc $a \in U_{x_0}$. Mais alors $[a, x_0]$ est inclus dans U_{x_0} (par définition de a on sait déjà que $]a, x_0] \subset U_{x_0}$) et donc par définition de $]a,b[$ on devrait avoir $[a, x_0] \subset]a,b[$, ce qui est une contradiction.

4)a) La dérivée de h sur $]a,b[$ est donnée par

$$\forall x \in]a,b[, \qquad h'(x) = g'(g(x))g'(x).$$

Puisque $g(\,]a,b[\,) \subset]a,b[$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, on en déduit que h' ne s'annule pas sur $]a,b[$.
Comme la fonction continue g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, elle est de signe constant sur cet intervalle, et on déduit de la formule précédente que h' est strictement positive sur l'intervalle $]a,b[$. Par conséquent, h est strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$. D'après la question précédente, on doit avoir $h(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$: puisque h est strictement croissante, on a nécessairement $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

4)b) L'application $x \mapsto h(x) - x$ est continue et dérivable sur $[a, x_0]$ et s'annule en a et x_0, donc d'après le théorème de Rolle sa dérivée s'annule en au moins un point $a' \in]a, x_0[$, pour lequel on a donc $h'(a') = 1$. L'existence de b' se démontre de la même manière.

PARTIE III

1) Les trois applications proposées appartiennent effectivement à $\mathcal{E}$ (il faut noter pour chacune qu'elle est de classe $\mathcal{C}^3$ et vérifier la condition).
L'ensemble des points critiques de $x \mapsto sin(x)$ est $\pi\,\mathbb{Z}$.
L'ensemble des points critiques de $x \mapsto e^{\lambda x}$ est: l'ensemble vide si $\lambda \neq 0$, $\mathbb{R}$ si $\lambda = 0$.
L'ensemble des points critiques de $x \mapsto x^2 + c$ est $\{0\}$.

2) On doit vérifier que $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^3$ puis que la condition est satisfaite, et faire une petite récurrence pour le cas f^n...

3)a) Soit $f \in \mathcal{E}$, on suppose que $x \mapsto |f'(x)|$ atteint un minimum local en x_1. Par contradiction, supposons par exemple que $f'(x_1) > 0$, alors $x \mapsto f'(x)$ atteint un minimum local en x_1, ce qui permet de conclure que $f''(x_1) = 0$ et

$f'''(x_1) \geq 0$. D'après la condition, on a alors

$$0 \;>\; 2f'''(x_1)f'(x_1) - 3f''(x_1)^2 \;=\; 2f'''(x_1)f'(x_1) \geq 0$$

d'où la contradiction.
Remarque: dans le cas $f'(x_1) < 0$, $x \mapsto -f'(x)$ atteint un minimum local en x_1 et donc $-f''(x_1) = 0$ et $-f'''(x_1) \geq 0$, et on obtient aussi une contradiction.

3)b) Supposons que $f \in \mathcal{E}$ et que f' ne s'annule pas sur $\,]a,b[\,$. L'application $x \mapsto |f'(x)|$ est continue sur $[a,b]$, donc il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $|f'(x_1)| = \min\{|f'(x)| \,:\, x \in [a,b]\}$. On démontre que $x_1 \in \{a,b\}$: dans le cas contraire $x_1 \in]a,b[\,$, et donc $x \mapsto |f'(x)|$ atteint un minimum local en x_1, donc $f'(x_1) = 0$ d'après la question précédente, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f. Donc x_1 appartient à $\{a,b\}$, ce qui implique

$$\forall x \in]a,b[\qquad |f'(x)| > \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}.$$

4) Supposons que les deux premières assertions ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire:

$(E) \qquad \exists x < x_0 \qquad f^{qn}(x)$ ne tend pas vers x_0 quand $n \to +\infty$

et

$(E') \qquad \exists x' > x_0 \qquad f^{qn}(x')$ ne tend pas vers x_0 quand $n \to +\infty$.

On reprend les notations de la partie II: on pose $g := f^q$. D'après (E) et (E'), l'intervalle I_{x_0} est borné, et peut donc s'écrire sous la forme $I_{x_0} =]a,b[\,$.
On démontre que g a un point critique dans l'intervalle $\,]a,b[\,$: supposons le contraire, il découle de II.4)a) qu'il existe $a' \in]a,x_0[\,$ et $b' \in]x_0,b[\,$ tels que $h'(a) = h'(b) = 1$, où $h = g \circ g$. Puisque $f \in \mathcal{E}$, on déduit de III.2 que $g = f^q \in \mathcal{E}$ et que $h \in \mathcal{E}$. De plus, comme $h' = (g' \circ g)g'$, $g(\,]a,b[\,) \subset]a,b[\,$ et g' ne s'annule pas sur $\,]a,b[\,$, donc la dérivée de h ne s'annule pas sur $\,]a,b[\,$.
D'après III.3)b) appliqué à h on a donc

$$|h'(x_0)| \;>\; \min\{|h'(a')|, |h'(b')|\} \;=\; 1.$$

Or $|h'(x_0)| = |g'(g(x_0))g'(x_0)| = |g'(x_0)|^2 < 1$, d'où la contradiction.
Soit donc z un point critique de g dans l'intervalle $\,]a,b[\,$. Comme

$$0 \;=\; g'(z) \;=\; \prod_{0 \leq i \leq q-1} f'(f^i(z))$$

il existe $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ tel que $y := f^i(z)$ est un point critique de f. Enfin comme $z \in]a,b[\subset U_{x_0}$, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} f^{nq}(z) \;=\; \lim_{n \to +\infty} g^n(z) = x_0.$$

En appliquant la fonction continue f^i on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} f^{nq}(y) \;=\; \lim_{n \to +\infty} f^i(f^{nq}(z)) \;=\; f^i\left(\lim_{n \to +\infty} f^{nq}(z)\right) \;=\; f^i(x_0)$$

ce qui démontre bien la troisième assertion.

PARTIE IV

1) D'après I.2)a), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| > \beta \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty.$$

Puisque $f_c \in \mathcal{E}$, ceci exclut les deux premières assertion de III.4 pour les périodiques attractifs x_0 et x_1: la troisième assertion est donc vérifiée. Soit q_0 la période x_0 et q_1 la période de x_1. Le seul point critique de f est $y = 0$, on en déduit qu'il existe un point x_0' de l'orbite de x_0 et un point x_1' de l'orbite de x_1 tels que

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nq_0}(0) = x_0' \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} f^{nq_1}(0) = x_1'.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on effectue la division euclidienne $nq_1 = k_n q_0 + r_n$ où $r_n \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$. Puisque $q_1 \geq 1$, la suite croissante d'entiers $(k_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. On peut de plus extraire de la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite constante $(r_{n_j})_{j\geq 1}$ égale à un entier $r \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$. Puisque la suite $(f^{k_{n_j} q_0}(0))_{j\geq 1}$ est une suite extraite de la suite $(f^{nq_0}(0))_{n\geq 1}$ il vient

$$\lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j} q_0}(0) = x_0'$$

et en appliquant la fonction continue f^r on a

$$\lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j} q_0 + r_{n_j}}(0) \;=\; \lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j} q_0 + r}(0) \;=\; f^r\left(\lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j} q_0}(0)\right) \;=\; f^r(x_0').$$

On obtient donc finalement

$$x_1' \;=\; \lim_{n\to+\infty} f^{nq_1}(0) \;=\; \lim_{j\to+\infty} f^{n_j q_1}(0) \;=\; \lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j} q_0 + r_{n_j}}(0) \;=\; f^r(x_0').$$

Donc x_0 et x_1 ont bien la même orbite.

2) En raisonnant comme à la question précédente, on voit que si x_0 est un point périodique attractif de f de période q alors il existe un point x_0' de son orbite tel que

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nq}(0) = x_0'.$$

Or on a vu à la question I.3)a) que lorsque $c < -2$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(0) = +\infty.$$

Ceci montre que f n'a pas de point périodique attractif.

3) On suit l'indication: on note $\beta_1 < \ldots < \beta_k$ les racines de P'. On remarque que si β_i est une racine d'ordre d_i de P', alors c'est une racine d'ordre $d_i - 1$ de P''. Par conséquent, on peut simplifier la fraction rationnelle $\frac{P''}{P'}$ de telle sorte qu'elle soit le rapport $\frac{Q_2}{Q_1}$ de deux polynômes tels que: le degré de Q_2 est inférieur de 1 à celui de Q_1 et le polynôme Q_1 est scindé et a pour racines les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_k$. En décomposant la fraction $\frac{Q_2}{Q_1}$ en éléments simples on obtient l'existence de nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ pour lesquels

$$(F) \qquad \frac{P''(X)}{P'(X)} \;=\; \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{X - \beta_j}.$$

On va maintenant déterminer les valeurs des α_i. L'idée est de multiplier par $x-\beta_i$ dans l'égalité (F) et de faire tendre x vers β_i: le membre de droite tend évidemment vers α_i, tandis que dans le membre de gauche on a

$$\frac{(x-\beta_i)P''(x)}{P'(x)} \;=\; \frac{x-\beta_i}{P'(x)-P'(\beta_i)}P''(x) \;\to\; \frac{1}{P''(\beta_i)}P''(\beta_i) \;=\; 1.$$

Evidemment ce petit calcul ne marche que si $P''(\beta_i)\neq 0$... Dans le cas général, soit d_i l'ordre de la racine β_i, on remarque que

$$\frac{P'(x)}{(x-\beta_i)^{d_i}} \;=\; \delta\prod_{j\neq i}(x-\beta_j)^{d_j} \;\to\; \delta\prod_{j\neq i}(\beta_i-\beta_j)^{d_j} \;\; \textit{quand } x\to\beta_i$$

où δ est le coefficient dominant de P'. De même, on a

$$\frac{P''(x)}{(x-\beta_i)^{d_i-1}} \;=\; \delta\sum_{l=1}^{k} d_l(x-\beta_l)^{d_l-1}\prod_{j\neq l}\frac{(x-\beta_j)^{d_j}}{(x-\beta_i)^{d_i-1}} \;\to\; \delta d_i\prod_{j\neq i}(\beta_i-\beta_j)^{d_j}$$

quand $x\to\beta_i$. Par conséquent on a

$$\frac{(x-\beta_i)P''(x)}{P'(x)} \;=\; \frac{(x-\beta_i)^{d_i}}{P'(x)}\frac{P''(x)}{(x-\beta_i)^{d_i-1}} \;\to\; d_i.$$

On en conclut

$$(F') \qquad \frac{P''(X)}{P'(X)} \;=\; \sum_{j=1}^{k}\frac{d_j}{X-\beta_j}.$$

Par conséquent pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{\beta_1,\ldots,\beta_k\}$ on a

$$\left(\frac{P''}{P'}\right)'(x) \;=\; \frac{P'''(x)P'(x)-(P''(x))^2}{(P'(x))^2} \;=\; -\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j}{(x-\beta_j)^2} \;<\; 0.$$

Par conséquent, pour tout x tel que $P'(x)\neq 0$ on a $P'''(x)P'(x)-(P''(x))^2<0$ et donc *a fortiori* $2P'''(x)P'(x)-3(P''(x))^2<0$. Puisque P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en conclut donc que P appartient à $\mathcal{E}$. Reste à remarquer que

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{|P(x)|}{|x|} \;=\; +\infty.$$

car P est de degré supérieur à 2. Par conséquent, il existe $K>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad |x|>K \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}|P^n(x)|=+\infty.$$

On en conclut que si x_0 est un point fixe périodique attractif de P, alors c'est toujours la troisième assertion de la question III.4 qui est vérifiée. Le même raisonnement qu'à la question 1) montre que deux points périodiques attractifs associés au même point critique de P ont la même orbite, par conséquent P a au plus autant d'orbites attractives que de points critiques, soit au plus $d-1$ orbites attractives.