Capes externe de mathématiques : session 2007
Première composition

INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Dans une première partie, nous nous attacherons à démontrer, de différentes façons, par des méthodes élémentaires, que cette suite converge. Les parties 2, 3 et 4 suivantes seront consacrées à la détermination de sa limite S par divers moyens. Les parties 5 et 6 utiliseront la valeur de S pour calculer la somme de certaines séries numériques.

On rappelle que, pour tous entiers m, n vérifiant $m \leq n$, on note $[\![m, n]\!]$ l'intervalle d'entiers

$$[\![m, n]\!] = \{p \in \mathbb{Z} \mid m \leq p \leq n\}$$

PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

Dans cette partie, le candidat utilisera uniquement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S.

1. *Première méthode*

a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

c) Démontrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge et donner un majorant de sa limite.

Dans toute la suite du problème, on notera S cette limite.

2. *Deuxième méthode*

On considère la suite $(t_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad t_n = s_n + \frac{1}{n}$$

a) Démontrer que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

b) Donner, en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de S.

3. *Troisième méthode*

Ecrire le texte d'un exercice de niveau terminale S démontrant, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$: $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$. Rappeler la formule permettant de calculer la somme $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ des racines de P en fonction de ses coefficients a_k, $k \in [\![0, n]\!]$.

2. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité

$$\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binômial pour $k \in [\![0, p]\!]$.

b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \not\equiv 0[\pi]$, on a

$$\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \big(\operatorname{cotan}^2 \varphi\big)^{p-k}$$

où $\operatorname{cotan} \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le réel $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. a) Démontrer, pour tout réel $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, les encadrements

$$0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$$

b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

c) Démontrer que $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ défines par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

sont convergentes et déterminesr les valeurs exactes de leurs limites, respectivement notées U, V et W.

TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calculer les intégrales I_0 et J_0.

2. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$

(*Indication : on pourra penser à une intégration par parties.*)

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$

3. Soit $n \geq 1$.

a) Démontrer la relation $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

b) En déduire que $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$

c) Démontrer la relation $\dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$

4. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x \leq \dfrac{\pi}{2} \sin x$

b) En déduire que, pour tout entier n, on a

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \qquad \text{puis} \qquad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

c) Retrouver la valeur de S.

QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

Pour tout entier $n \geq 1$, on note D_n le *noyau de* DIRICHLET, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note L_n l'intégrale

$$L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier $k \geq 1$.

b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0,\pi]$ par : $x \to \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

4. Soit $\phi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} \phi(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(*Indication : on pourra penser à une intégration par parties.*)

5. **a)** Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.

b) Retrouver la valeur de S. (*On utilisera la relation entre W et S obtenue à la question 5 de la deuxième partie*)

CINQUIÈME PARTIE : Une somme double

L'objet de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

On pose, pour tout entier $N \geq 1$, $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

1. a) Démontrer que pour tout entier $N \geq 1$, on a : $\ln(1+N) \leq H_N \leq 1+\ln(N)$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{N} = 0$

c) Démontrer que pour tout entier $M \geq 2$, on a :

$$\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2} - \frac{H_M}{M}$$

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa limite.

2. Pour tous entier $N \geq 1$ et pour tout entier $m \geq 2$, on pose

$$Z_{N,m} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}$$

a) Démontrer que pour tout entier $m \geq 2$

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}$

3. a) Montrer que pour tout entier $N \geq 1$ et pour tout entier $M \geq 2$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$$

b) Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

c) En déduire alors

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme

Pour tout réel $x \in [-1,1[$, on considère l'intégrale

$$\mathrm{Li}\,(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence de cette intégrale pour tout réel $x \in [-1,1[$.

2. On définit la fonction Dilogarithme

$$\mathrm{Li}\ :\ \left|\begin{array}{ccc} [-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Li}\,(x)\end{array}\right.$$

Démontrer que la fonction Li est prolongeable par continuité en 1. On notera encore Li ce prolongement par continuité.

3. **a)** Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\mathrm{Li}\,(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{Li}\,(1)$.

4. **a)** Pour $x \in]0,1[$, calculer la dérivée de $\mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x)$

b) Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in]0,1[,\qquad \mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$$

5. Déduire de la question précédente, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$

6. **a)** Pour tout réel $x \in]-1,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(-x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,(x^2)$$

b) Retrouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

7. **a)** Pour tout réel $x \in]0,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}\,(x) - \mathrm{Li}\,(-x) + \mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x)$$

b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$