

Convergence asymptotique d'une forêt de plusieurs espèces, gerée optimalement

VI Jornadas Franco-Chilenas en Optimización

R. Cominetti & A. Piazza

Centro de Modelamiento Matemático

UNIVERSIDAD DE CHILE

Mai, 2008

Plan de l'exposé

- 1 Review
- 2 Forêt de plusieurs espèces
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 3 Marché de la terre
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 4 Conclusion

Scheme

- 1 Review
- 2 Forêt de plusieurs espèces
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 3 Marché de la terre
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 4 Conclusion

Problème de Faustmann(1849)

Forêt équienne (arbres identiques) & Coupe à blanc.

Valeur de la terre libérée.

Bénéfice total : fonction de la période de coupe.

On définit l'âge de Faustmann n_F = période optimale.

Population divisée en classes d'âge & Coupe partielle possible.

Chaque classe = arbres identiques.

$X = (x_1, \dots, x_N)$ état de la forêt.

Déf. : État Soutenable ou Forêt Normale

$$X^* = \left(\underbrace{\frac{S}{n_F}, \dots, \frac{S}{n_F}}_{n_F}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-n_F} \right)$$

Historiquement, on a cru que toute forêt exploitée de manière optimale atteint l'état soutenable.

Problème de Faustmann(1849)

Forêt équienne (arbres identiques) & Coupe à blanc.

Valeur de la terre libérée.

Bénéfice total : fonction de la période de coupe.

On définit l'âge de Faustmann n_F = période optimale.

Population divisée en classes d'âge & Coupe partielle possible.

Chaque classe = arbres identiques.

$X = (x_1, \dots, x_N)$ état de la forêt.

Déf. : État Soutenable ou Forêt Normale

$$X^* = \left(\underbrace{\frac{S}{n_F}, \dots, \frac{S}{n_F}}_{n_F}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-n_F} \right)$$

Historiquement, on a cru que toute forêt exploitée de manière optimale atteint l'état soutenable.

Résultats connus, une espèce

1985 Mitra & Wan : Si $X(0) = X^*$, la trajectoire optimale est

$$X(t) \equiv X^*$$

Si $X(0) \neq X^*$: Y a-t-il convergence vers l'E.S. ? **NON.**

2000 Salo & Tahvonen : Il y a un voisinage de l'E.S. (V)
tel que la traj. opt. est périodique.

Résultats partiels de convergence vers l'ensemble V .

2003 Rapaport, Sraidi & Terreaux : Coupe interdite avant l'âge de Faustmann
⇒ toute traj. opt. devient périodique en temps fini.

Résultats connus, une espèce

1985 Mitra & Wan : Si $X(0) = X^*$, la trajectoire optimale est

$$X(t) \equiv X^*$$

Si $X(0) \neq X^*$: Y a-t-il convergence vers l'E.S. ? **NON.**

2000 Salo & Tahvonen : Il y a un voisinage de l'E.S. (V)
tel que la traj. opt. est périodique.

Résultats partiels de convergence vers l'ensemble V .

2003 Rapaport, Sraidi & Terreux : Coupe interdite avant l'âge de Faustmann
 \Rightarrow toute traj. opt. devient périodique en temps fini.

Résultats connus, deux espèces

R. Cominetti & A.P. (2006)

Modèle de deux espèces : une généralisation du modèle de Rapaport et al.
Âges de maturité : n, m

- Il y a un état soutenable unique
- Si la trajectoire optimale devient gloutonne, il y a convergence vers :
 - l'état soutenable, si $(n, m) = 1$.
 - l'ensemble des cycles périodiques optimaux, dans le cas général

Questions ouvertes à l'époque :

- plus de deux espèces ?
- toutes les trajectoires optimales deviennent-elles gloutonnes ?
- si non, peut-on caractériser la convergence ?

Résultats connus, deux espèces

R. Cominetti & A.P. (2006)

Modèle de deux espèces : une généralisation du modèle de Rapaport et al.
Âges de maturité : n, m

- Il y a un état soutenable unique
- Si la trajectoire optimale devient gloutonne, il y a convergence vers :
 - l'état soutenable, si $(n, m) = 1$.
 - l'ensemble des cycles périodiques optimaux, dans le cas général

Questions ouvertes à l'époque :

- plus de deux espèces ?
- toutes les trajectoires optimales deviennent-elles gloutonnes ?
- si non, peut-on caractériser la convergence ?

Scheme

- 1 Review
- 2 **Forêt de plusieurs espèces**
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 3 **Marché de la terre**
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 4 Conclusion

Notre modèle

On utilise une extension du modèle de Rapaport et al à K espèces avec des âges de maturité différents ($n^i, i = 1, \dots, K$)

- Avant l'âge de maturité : coupe interdite
- Après l'âge de maturité : biomasse constante

Notre modèle

On utilise une extension du modèle de Rapaport et al à K espèces avec des âges de maturité différents (n^i , $i = 1, \dots, K$)

- Avant l'âge de maturité : coupe interdite
- Après l'âge de maturité : biomasse constante

État de l'espèce 1 au temps t

$$\mathbb{X}_t = \begin{pmatrix} \bar{X}_t^1 \\ X_{n^1, t}^1 \\ X_{n^1-1, t}^1 \\ \vdots \\ X_1^1, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_t^2 \\ X_{n^2, t}^2 \\ X_{n^2-1, t}^2 \\ \vdots \\ X_1^2, t \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \bar{X}_t^k \\ X_{n^k, t}^k \\ X_{n^k-1, t}^k \\ \vdots \\ X_1^k, t \end{pmatrix}$$

Notre modèle

On utilise une extension du modèle de Rapaport et al à K espèces avec des âges de maturité différents (n^i , $i = 1, \dots, K$)

- Avant l'âge de maturité : coupe interdite
- Après l'âge de maturité : biomasse constante

État de la forêt au temps t

$$\mathbb{X}_t = \begin{pmatrix} \bar{X}_t^1 \\ X_{n^1, t}^1 \\ X_{n^1-1, t}^1 \\ \vdots \\ X_{1, t}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_t^2 \\ X_{n^2, t}^2 \\ X_{n^2-1, t}^2 \\ \vdots \\ X_{1, t}^2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \bar{X}_t^k \\ X_{n^k, t}^k \\ X_{n^k-1, t}^k \\ \vdots \\ X_{1, t}^k \end{pmatrix}$$

Problème d'Optimisation

c_t^i Coupe de la espèce i au temps t ($c_t^i \leq \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i$)

U^i Fonctions de bénéfice (régulières, croissantes et strictement concaves)

b Taux d'actualisation ($0 < b < 1$)

$$P(\mathbb{X}_0) \left\{ \begin{array}{l} \max_{c^i, \bar{x}^i, x_j^i \in \ell_+^\infty} \quad \sum_{i=1}^k \sum_{t=0}^{\infty} b^t U^i(c_t^i) \\ \text{t.q.} \quad \sum_i x_{1,t+1}^i = \sum_i c_t^i \\ \bar{x}_{t+1}^i = \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i - c_t^i \\ x_{j+1,t+1}^i = x_{j,t}^i \quad j < n^i \\ + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

Problème d'Optimisation

c_t^i Coupe de la espèce i au temps t ($c_t^i \leq \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i$)

U^i Fonctions de bénéfice (régulières, croissantes et strictement concaves)

b Taux d'actualisation ($0 < b < 1$)

$$P(\mathbb{X}_0) \left\{ \begin{array}{l} \max_{c^i, \bar{x}^i, x_j^i \in \ell_+^\infty} \quad \sum_{i=1}^k \sum_{t=0}^{\infty} b^t U^i(c_t^i) \\ \text{t.q.} \quad \sum_i x_{1,t+1}^i = \sum_i c_t^i \\ \bar{x}_{t+1}^i = \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i - c_t^i \\ x_{j+1,t+1}^i = x_{j,t}^i \quad j < n^i \\ + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

Nouveaux résultats

Ordre:
$$\frac{b^{n^1}}{1-b^{n^1}} U^{1'}(0) \geq \frac{b^{n^2}}{1-b^{n^2}} U^{2'}(0) \geq \dots \geq \frac{b^{n^k}}{1-b^{n^k}} U^{k'}(0)$$

L'état soutenable = invariant sous la politique optimale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^{*1} \\ \vdots \\ x^{*1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ x^{*s} \\ \vdots \\ x^{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de $\{x^{*i}, i=1, \dots, k\}$
dépendent de b, S
et $U^i(\cdot), i=1, \dots, k$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

L'état soutenable **existe** toujours et il est **unique**.

Nouveaux résultats

Ordre:
$$\frac{b^{n^1}}{1-b^{n^1}} U^{1'}(0) \geq \frac{b^{n^2}}{1-b^{n^2}} U^{2'}(0) \geq \dots \geq \frac{b^{n^k}}{1-b^{n^k}} U^{k'}(0)$$

L'état soutenable = invariant sous la politique optimale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^{*1} \\ \vdots \\ x^{*1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ x^{*s} \\ \vdots \\ x^{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de $\{x^{*i}, i=1, \dots, k\}$ dépendent de b, S et $U^i(\cdot), i=1, \dots, k$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

L'état soutenable **existe** toujours et il est **unique**.

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i -périodique pour chaque espèce.

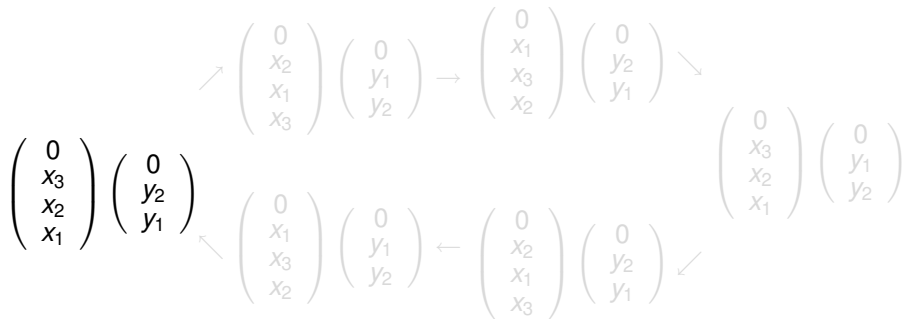


Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caractérise Δ^P , l'ensemble des états dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i -périodique pour chaque espèce.

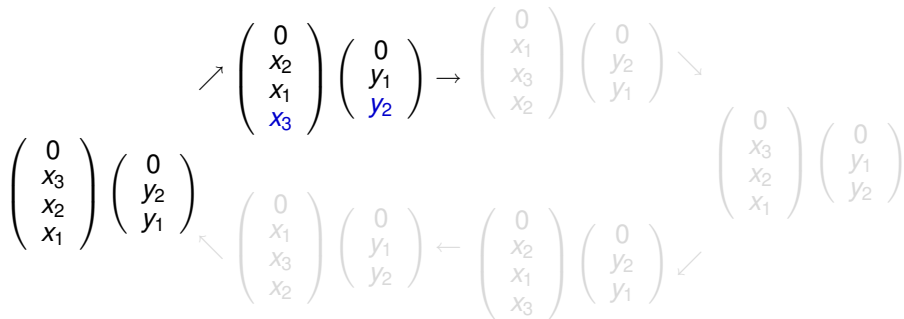


Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caractérise Δ^p , l'ensemble des états dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i -périodique pour chaque espèce.

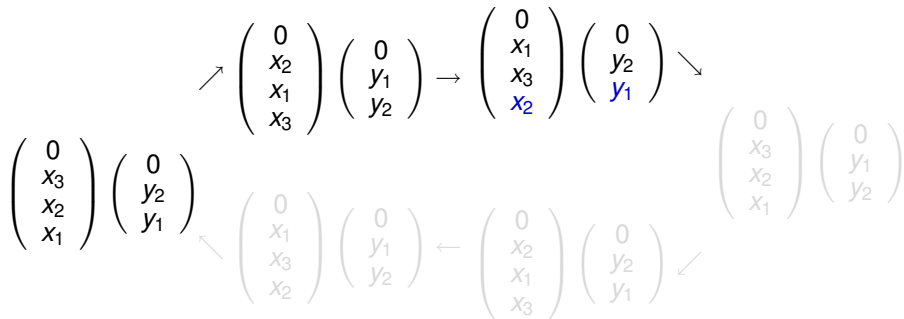


Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caractérise Δ^p , l'ensemble des états dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i -périodique pour chaque espèce.

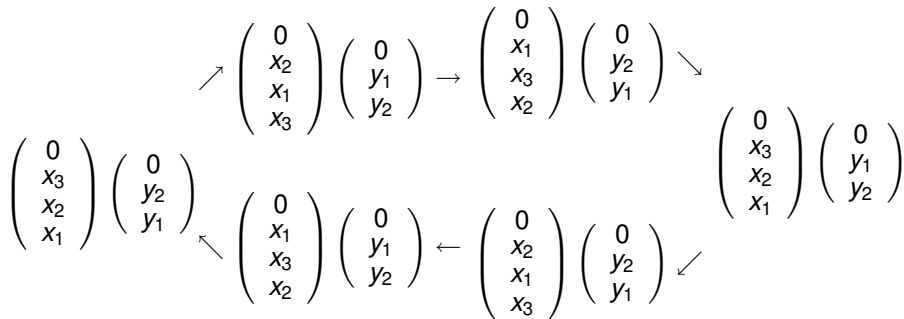


Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caractérise Δ^p , l'ensemble des états dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i -périodique pour chaque espèce.

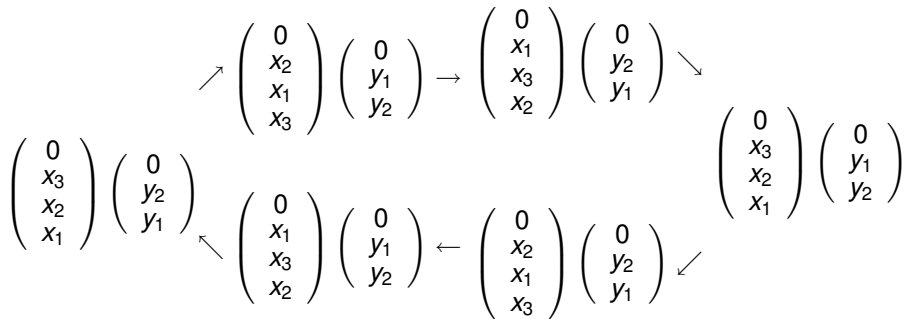


Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caractérise Δ^p , l'ensemble des états dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i -périodique pour chaque espèce.



Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caractérise Δ^P , l'ensemble des états dont la traj. optimale est GPC

Convergence asymptotique

Théorème R.Cominetti & A.P. '06

Si $\text{m.c.d.}(n^1, \dots, n^s) = 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}^*$ *pour toute condition initiale.*

Si $\text{m.c.d.}(n^1, \dots, n^s) > 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbb{X}(t), \Delta^p) = 0$

*i.e. la trajectoire converge vers Δ^p
pour toute condition initiale.*

Convergence asymptotique

Théorème R.Cominetti & A.P. '06

Si $\text{m.c.d.}(n^1, \dots, n^s) = 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}^*$ pour toute condition initiale.

Si $\text{m.c.d.}(n^1, \dots, n^s) > 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbb{X}(t), \Delta^p) = 0$

*i.e. la trajectoire converge vers Δ^p
pour toute condition initiale.*

Corollaire : Toute trajectoire optimale est “asymptotiquement gloutonne”

Convergence asymptotique

Théorème R.Cominetti & A.P. '06

Si $\text{m.c.d.}(n^1, \dots, n^s) = 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}^*$ pour toute condition initiale.

Si $\text{m.c.d.}(n^1, \dots, n^s) > 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbb{X}(t), \Delta^p) = 0$

*i.e. la trajectoire converge vers Δ^p
pour toute condition initiale.*

Corollaire : Toute trajectoire optimale est “asymptotiquement gloutonne”

- Il y a de nombreux résultats de *turnpike* pour les problèmes de distribution de ressources.
- En général, ils sont locaux ou supposent $b \approx 1$.
- **Nous prouvons la convergence globale sans $b \approx 1$.**

Sans actualisation ($b = 1$)

A.P. '08

Une trajectoire \hat{X}_t est **optimale** si pour toute autre trajectoire :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^T \sum_{i \in I} [U^i(c_t^i) - U^i(\hat{c}_t^i)] \leq 0$$

Les résultats sont encore valables :

$$\hat{X}_t \rightarrow X_1^* \quad \text{pour tout } X_0$$

De plus,

- $\Delta_1^p = \{X_1^*\}$
- $X_b^* \rightarrow X_1^*$ si $b \rightarrow 1$
- $\Delta_b^p \rightarrow \{X_1^*\}$ si $b \rightarrow 1$

Sans actualisation ($b = 1$)

A.P. '08

Une trajectoire \hat{X}_t est **optimale** si pour toute autre trajectoire :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^T \sum_{i \in I} [U^i(c_t^i) - U^i(\hat{c}_t^i)] \leq 0$$

Les résultats sont encore valables :

$$\hat{X}_t \rightarrow X_1^* \quad \text{pour tout } X_0$$

De plus,

- $\Delta_1^p = \{X_1^*\}$
- $X_b^* \rightarrow X_1^*$ si $b \rightarrow 1$
- $\Delta_b^p \rightarrow \{X_1^*\}$ si $b \rightarrow 1$

Scheme

- 1 Review
- 2 Forêt de plusieurs espèces
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 3 Marché de la terre**
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 4 Conclusion

Modèle

S : Surface totale, ($S \gg 1$)

a_t : surface occupée, $0 \leq a_t \leq S$

c_t : fraction de terre négociée à chaque étape

Prix fonction de a_t et c_t :

$$W(a_t, c_t) + g(c_t)$$

$W(a, c)$ -prix de la terre sur le marché,

-concave, régulière.

-terre moins abondante = plus chère.

$g(c)$ -coûts de transaction (frais administratifs)

-concave, non positive, $g(0) = 0$.

Par exemple: $g(c) = -\gamma|c|$

Modèle

S : Surface totale, ($S \gg 1$)

a_t : surface occupée, $0 \leq a_t \leq S$

c_t : fraction de terre négociée à chaque étape

Prix fonction de a_t et c_t :

$$W(a_t, c_t) + g(c_t)$$

$W(a, c)$ -prix de la terre sur le marché,

-concave, régulière.

-terre moins abondante = plus chère.

$g(c)$ -coûts de transaction (frais administratifs)

-concave, non positive, $g(0) = 0$.

Par exemple: $g(c) = -\gamma|c|$

Problème d'Optimisation

$$P(\mathbb{X}_0) \left\{ \begin{array}{l} \max_{c^i, x^i, x^i \in \ell_+^\infty} \quad \sum_{t=0}^{\infty} b^t [\sum_{i=1}^k U^i(c_t^i) + W(a_t, c_t) + g(c_t)] \\ \text{s.t.} \quad \sum_i x_{1,t+1}^i = \sum_i c_t^i + c_t \\ \quad \quad \quad a_{t+1} = a_t + c_t \\ \quad \quad \quad + \text{croissance} \\ \quad \quad \quad + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

Observation

La fonction objective est continue et concave mais **non-differentiable!**

Points stationnaires

Soit : Δ^* = l'ensemble des états soutenables

Δ^P = l'ensemble des états dont la traj. optimale est un GPC

Proposition (A.P. '07)

- $\Delta^* = \{X_a^*, a \in [\underline{a}, \bar{a}]\}$ avec $[\underline{a}, \bar{a}] \subseteq [0, S]$
- On caractérise Δ^P . (Excepte $\bar{a} = S$)
- Remarque : Seuls les $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ admettent GPCs
 $\Rightarrow \Delta^P \subseteq \{X/a \in [\underline{a}, \bar{a}]\}$

Points stationnaires

Soit : Δ^* = l'ensemble des états soutenables

Δ^P = l'ensemble des états dont la traj. optimale est un GPC

Proposition (A.P. '07)

- $\Delta^* = \{X_a^*, a \in [\underline{a}, \bar{a}]\}$ avec $[\underline{a}, \bar{a}] \subseteq [0, S]$
- On caractérise Δ^P . (Excepte $\bar{a} = S$)
- Remarque : Seuls les $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ admettent GPCs
 $\Rightarrow \Delta^P \subseteq \{X/a \in [\underline{a}, \bar{a}]\}$

Convergence asymptotique

Théorème (A.P. '07)

W concave stricte en c
ou trajectoire gloutonne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t = 0 \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} a_t = a$$

W linéaire en c

$$c_t = 0 \wedge a_t = a \quad \forall t \geq 2 \max_i n^i$$

Un problème de surface fixe

1 $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbb{X}_t, \Delta_a^P) = 0$ ($\Delta_a^P =$ l'ensemble de GPC dont la surface occupée est a)

2 Si $m.c.d(n^1, \dots, n^s) = 1$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{X}_t = \mathbb{X}_a^*$

Convergence asymptotique

Théorème (A.P. '07)

W concave stricte en c
ou trajectoire gloutonne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t = 0 \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} a_t = a$$

W linéaire en c

$$c_t = 0 \wedge a_t = a \quad \forall t \geq 2 \max_i n^i$$

Un problème de surface fixe

1 $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbb{X}_t, \Delta_a^p) = 0$ ($\Delta_a^p =$ l'ensemble de GPC
dont la surface occupée est a)

2 Si $m.c.d(n^1, \dots, n^s) = 1$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{X}_t = \mathbb{X}_a^*$

Scheme

- 1 Review
- 2 Forêt de plusieurs espèces
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 3 Marché de la terre
 - Modèle et problème d'optimisation
 - Convergence globale
- 4 Conclusion

Conclusion

- On étudie un problème intertemporel de distribution des ressources en temps discret, représentant le problème de coupe optimale d'une forêt de plusieurs espèces.
- On caractérise l'équilibre et sa stabilité
- quand :
 - la forêt a plusieurs espèces et pour des trajectoires arbitraires,
 - avec et sans l'actualisation de bénéfices futurs et
 - un marché de la terre est introduit.

Une ligne de recherche possible :

L'étude de ce problème dans le cadre de la *viabilité*.

Conclusion

- On étudie un problème intertemporel de distribution des ressources en temps discret, représentant le problème de coupe optimale d'une forêt de plusieurs espèces.
- On caractérise l'équilibre et sa stabilité
- quand :
 - la forêt a plusieurs espèces et pour des trajectoires arbitraires,
 - avec et sans l'actualisation de bénéfices futurs et
 - un marché de la terre est introduit.

Une ligne de recherche possible :

L'étude de ce problème dans le cadre de la *viabilité*.

Merci !