Convergence asymptotique d'une forêt de plusieurs espèces, gerée optimalement

VI Jornadas Franco-Chilenas en Optimización

R.Cominetti & A. Piazza

Centro de Modelamiento Matemático

UNIVERSIDAD DE CHILE

Mai, 2008

Plan de l'exposé

Scheme

1. Review
2. Forêt de plusieurs espèces
   - Modèle et problème d'optimisation
   - Convergence globale
3. Marché de la terre
   - Modèle et problème d'optimisation
   - Convergence globale
4. Conclusion

Problème de Faustmann(1849)

Forêt équienne (arbres identiques) & Coupe à blanc.

- Valeur de la terre libérée.
- Bénéfice total : fonction de la période de coupe.
- On définit l'âge de Faustmann $n_F =$ période optimale.

Population divisée en classes d'âge & Coupe partielle possible.

- Chaque classe = arbres identiques.
- $X = (x_1, \ldots, x_N)$ état de la forêt.

Déf. : État Soutenable ou Forêt Normale

$$X^* = \Big(\underbrace{\tfrac{S}{n_F}, \ldots, \tfrac{S}{n_F}}_{n_F}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-n_F}\Big)$$

Historiquement, on a cru que toute forêt exploitée de manière optimale atteint l'état soutenable.

Problème de Faustmann(1849)

Forêt équienne (arbres identiques) & Coupe à blanc.

- Valeur de la terre libérée.
- Bénéfice total : fonction de la période de coupe.
- On définit l'âge de Faustmann $n_F =$ période optimale.

Population divisée en classes d'âge & Coupe partielle possible.

- Chaque classe = arbres identiques.
- $X = (x_1, \ldots, x_N)$ état de la forêt.

Déf. : État Soutenable ou Forêt Normale

$$X^* = \Big(\underbrace{\frac{S}{n_F}, \ldots, \frac{S}{n_F}}_{n_F}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-n_F}\Big)$$

Historiquement, on a cru que toute forêt exploitée de manière optimale atteint l'état soutenable.

Résultats connus, une espèce

1985 Mitra & Wan : Si $X(0) = X^*$, la trajectoire optimale est

$$X(t) \equiv X^*$$

Si $X(0) \neq X^*$: Y a-t-il convergence vers l'E.S. ? NON.

2000 Salo & Tahvonen : Il y a un voisinage de l'E.S. (V) tel que la traj. opt. est périodique.

Résultats partiels de convergence vers l'ensemble V.

2003 Rapaport, Sraidi & Terreaux : Coupe interdite avant l'âge de Faustmann $\Rightarrow$ toute traj. opt. devient périodique en temps fini.

Résultats connus, une espèce

1985 Mitra & Wan : Si $X(0) = X^*$, la trajectoire optimale est

$$X(t) \equiv X^*$$

Si $X(0) \neq X^*$: Y a-t-il convergence vers l'E.S. ? NON.

2000 Salo & Tahvonen : Il y a un voisinage de l'E.S. (V) tel que la traj. opt. est périodique.

Résultats partiels de convergence vers l'ensemble V.

2003 Rapaport, Sraidi & Terreaux : Coupe interdite avant l'âge de Faustmann $\Rightarrow$ toute traj. opt. devient périodique en temps fini.

Résultats connus, deux espèces

R.Cominetti & A.P. (2006)

Modèle de deux espèces : une généralisation du modèle de Rapaport et al.
Âges de maturité : n, m

- Il y a un état soutenable unique
- Si la trajectoire optimale devient gloutonne, il y a convergence vers :
  - l'état soutenable, si $(n, m) = 1$.
  - l'ensemble des cycles périodiques optimals, dans le cas général

Questions ouvertes à l'époque :

- plus de deux espèces ?
- toutes les trajectoires optimales deviennent-elles gloutonnes ?
- si non, peut-on caractériser la convergence ?

Résultats connus, deux espèces

R.Cominetti & A.P. (2006)

Modèle de deux espèces : une généralisation du modèle de Rapaport et al.
Âges de maturité : n, m

- Il y a un état soutenable unique
- Si la trajectoire optimale devient gloutonne, il y a convergence vers :
  - l'état soutenable, si $(n, m) = 1$.
  - l'ensemble des cycles périodiques optimals, dans le cas général

Questions ouvertes à l'époque :

- plus de deux espèces ?
- toutes les trajectoires optimales deviennent-elles gloutonnes ?
- si non, peut-on caractériser la convergence ?

Scheme

Notre modèle

On utilise une extension du modèle de Rapaport et al à K espèces avec des âges de maturité différents (n^i, $i = 1, \ldots, K$)

- Avant l'âge de maturité : coupe interdite
- Après l'âge de maturité : biomasse constante

Notre modèle

On utilise une extension du modèle de Rapaport et al à K espèces avec des âges de maturité différents (n^i, $i=1,\dots,K$)

- Avant l'âge de maturité : coupe interdite
- Après l'âge de maturité : biomasse constante

État de l'espèce 1 au temps t

$$\mathbb{X}_t = \begin{pmatrix} \bar{x}_t^1 \\ x^1_{n^1,\,t} \\ x^1_{n^1-1,\,t} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^1_{1,\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_t^2 \\ x^2_{n^2,\,t} \\ x^2_{n^2-1,\,t} \\ \vdots \\ x^2_{1,\,t} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \bar{x}_t^k \\ x^k_{n^k,\,t} \\ x^k_{n^k-1,\,t} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^k_{1,\,t} \end{pmatrix}$$

Notre modèle

On utilise une extension du modèle de Rapaport et al à K espèces avec des âges de maturité différents (n^i, $i = 1, \ldots, K$)

- Avant l'âge de maturité : coupe interdite
- Après l'âge de maturité : biomasse constante

État de la forêt au temps t

$$\mathbb{X}_t = \begin{pmatrix} \bar{x}_t^1 \\ x^1_{n^1,\,t} \\ x^1_{n^1-1,\,t} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^1_{1,\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_t^2 \\ x^2_{n^2,\,t} \\ x^2_{n^2-1,\,t} \\ \vdots \\ x^2_{1,\,t} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \bar{x}_t^k \\ x^k_{n^k,\,t} \\ x^k_{n^k-1,\,t} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x^k_{1,\,t} \end{pmatrix}$$

Problème d'Optimisation

- c_t^i Coupe de la espèce i au temps t $\quad (c_t^i \leq \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i)$
- U^i Fonctions de bénéfice (régulières, croissantes et strictement concaves)
- b Taux d'actualisation $(0 < b < 1)$

$$P(\mathbb{X}_0)\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{c^i,\, \bar{x}^i, x_j^i \in \ell_+^\infty} & \sum_{i=1}^k \sum_{t=0}^\infty b^t U^i(c_t^i) \\ \text{t.q.} & \sum_i x_{1,t+1}^i = \sum_i c_t^i \\ & \bar{x}_{t+1}^i = \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i - c_t^i \\ & x_{j+1,t+1}^i = x_{j,t}^i \qquad j < n^i \\ & + \text{ condition initiale} \end{array}\right.$$

Problème d'Optimisation

c_t^i Coupe de la espèce i au temps t $\quad (c_t^i \leq \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i)$

U^i Fonctions de bénéfice (régulières, croissantes et strictement concaves)

b Taux d'actualisation $(0 < b < 1)$

$$
P(\mathbb{X}_0) \left\{ \begin{array}{ll}
\max\limits_{c^i,\ \bar{x}^i, x_j^i \in \ell_+^\infty} & \sum_{i=1}^k \sum_{t=0}^\infty b^t U^i(c_t^i) \\
 & \\
\text{t.q.} & \sum_i x_{1,t+1}^i = \sum_i c_t^i \\
 & \bar{x}_{t+1}^i = \bar{x}_t^i + x_{n^i,t}^i - c_t^i \\
 & x_{j+1,t+1}^i = x_{j,t}^i \qquad j < n^i \\
 & + \text{ condition initiale}
\end{array} \right.
$$

Nouveaux résultats

Ordre: $$\frac{b^{n^1}}{1-b^{n^1}}U^{1\prime}(0) \geq \frac{b^{n^2}}{1-b^{n^2}}U^{2\prime}(0) \geq \cdots \geq \frac{b^{n^k}}{1-b^{n^k}}U^{k\prime}(0)$$

L'état soutenable = invariant sous la politique optimale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^{*1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{*1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ x^{*s} \\ \vdots \\ x^{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de $\{x^{*i},\ i=1,\ldots,k\}$

dépendent de b, S

et $U^i(\cdot),\ i=1,\ldots,k$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

L'état soutenable existe toujours et il est unique.

Nouveaux résultats

Ordre: $$\frac{b^{n^1}}{1-b^{n^1}}U^{1\prime}(0) \geq \frac{b^{n^2}}{1-b^{n^2}}U^{2\prime}(0) \geq \cdots \geq \frac{b^{n^k}}{1-b^{n^k}}U^{k\prime}(0)$$

L'état soutenable = invariant sous la politique optimale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^{*1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{*1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ x^{*s} \\ \vdots \\ x^{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de $\{x^{*i},\ i=1,\dots,k\}$

dépendent de b, S

et $U^i(\cdot),\ i=1,\dots,k$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

L'état soutenable existe toujours et il est unique.

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i-périodique pour chaque espèce.

$$\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \swarrow \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \nwarrow \begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix}$$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caracterise Δ^p, l'ensemble des état dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i-périodique pour chaque espèce.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\nwarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \swarrow$$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caracterise Δ^p , l'ensemble des état dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i-périodique pour chaque espèce.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\ \color{blue}{x_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\ \color{blue}{y_2}\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \arrow[dr] & \\
\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \arrow[ur] & & & \begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \arrow[dl] \\
 & \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \arrow[ul] & \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caracterise Δ^p , l'ensemble des état dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i-périodique pour chaque espèce.

$$\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\{\color{blue}x_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\{\color{blue}y_1}\end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \swarrow \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \nwarrow \begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix}$$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caracterise Δ^p, l'ensemble des état dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i-périodique pour chaque espèce.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} & \searrow & \\
 & \nearrow & & & & & \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} & & & & & & \\
 & \nwarrow & \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \longleftarrow & \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} & \swarrow &
\end{array}
$$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caracterise Δ^p , l'ensemble des état dont la traj. optimale est GPC

Cycles Gloutons Périodiques (GPC)

Cycles Gloutons Périodiques Une trajectoire gloutonne et n^i-périodique pour chaque espèce.

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \arrow[dr] & \\
\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \arrow[ur] & & & \begin{pmatrix}0\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \arrow[dl] \\
 & \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_3\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_1\\y_2\end{pmatrix} \arrow[ul] & \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_1\end{pmatrix} \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

Proposition : (Cominetti & A.P. '06)

On caracterise Δ^p , l'ensemble des état dont la traj. optimale est GPC

Convergence asymptotique

Théorème R.Cominetti & A.P. '06

Si m.c.d.$(n^1,\dots,n^s) = 1$ $\lim_{t\to\infty} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}^*$ *pour toute condition initiale.*

Si m.c.d.$(n^1,\dots,n^s) > 1$ $\lim_{t\to\infty} dist(\mathbb{X}(t), \Delta^p) = 0$

i.e. la trajectoire converge vers Δ^p
pour toute condition initiale.

Convergence asymptotique

Théorème R.Cominetti & A.P. '06

Si m.c.d.$(n^1, \ldots, n^s) = 1$ $\lim_{t\to\infty} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}^*$ *pour toute condition initiale.*

Si m.c.d.$(n^1, \ldots, n^s) > 1$ $\lim_{t\to\infty} dist(\mathbb{X}(t), \Delta^p) = 0$

i.e. la trajectoire converge vers Δ^p
pour toute condition initiale.

Corollaire : Toute trajectoire optimale est "asymptotiquement gloutonne"

Convergence asymptotique

Théorème R.Cominetti & A.P. '06

Si m.c.d.$(n^1,\ldots,n^s) = 1$ $\lim_{t\to\infty} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}^*$ *pour toute condition initiale.*

Si m.c.d.$(n^1,\ldots,n^s) > 1$ $\lim_{t\to\infty} dist(\mathbb{X}(t), \Delta^p) = 0$

i.e. la trajectoire converge vers Δ^p
pour toute condition initiale.

Corollaire : Toute trajectoire optimale est "asymptotiquement gloutonne"

- Il y a de nombreux résultats de *turnpike* pour les problèmes de distribution de ressources.
- En général, ils sont locaux ou supposent $b \approx 1$.
- **Nous prouvons la convergence globale sans $b \approx 1$.**

Sans actualisation ($b = 1$) A.P. '08

Une trajectoire $\hat{\mathbb{X}}_t$ est **optimale** si pour toute autre trajectoire :

$$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \sum_{i\in I} [U^i(c_t^i) - U^i(\hat{c}_t^i)] \leq 0$$

Les résultats sont encore valables : $\hat{\mathbb{X}}_t \to \mathbb{X}_1^*$ pour tout $\mathbb{X}_0$

De plus,

- $\Delta_1^p = \{\mathbb{X}_1^*\}$
- $\mathbb{X}_b^* \to \mathbb{X}_1^*$ si $b \to 1$
- $\Delta_b^p \to \{\mathbb{X}_1^*\}$ si $b \to 1$

Sans actualisation ($b = 1$) A.P. '08

Une trajectoire $\hat{\mathbb{X}}_t$ est **optimale** si pour toute autre trajectoire :

$$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \sum_{i\in I} [U^i(c_t^i) - U^i(\hat{c}_t^i)] \leq 0$$

Les résultats sont encore valables : $\hat{\mathbb{X}}_t \to \mathbb{X}_1^*$ pour tout $\mathbb{X}_0$

De plus,

- $\Delta_1^p = \{\mathbb{X}_1^*\}$
- $\mathbb{X}_b^* \to \mathbb{X}_1^*$ si $b \to 1$
- $\Delta_b^p \to \{\mathbb{X}_1^*\}$ si $b \to 1$

Scheme

Modèle

S : Surface totale, ($S \gg 1$)
a_t : surface occupée, $0 \leq a_t \leq S$
c_t : fraction de terre négociée à chaque étape

Prix fonction de a_t et c_t: $W(a_t, c_t) + g(c_t)$

$W(a, c)$ -prix de la terre sur le marché,
-concave, régulière.
-terre moins abondante = plus chère.

$g(c)$ -coûts de transaction (frais administratifs)
-concave, non positive, $g(0) = 0$.
Par exemple: $g(c) = -\gamma|c|$

Modèle

S : Surface totale, ($S \gg 1$)

a_t : surface occupée, $0 \leq a_t \leq S$

c_t : fraction de terre négociée à chaque étape

Prix fonction de a_t et c_t:

$$\boxed{W(a_t, c_t) + g(c_t)}$$

$W(a, c)$ -prix de la terre sur le marché,
-concave, régulière.
-terre moins abondante = plus chère.

$g(c)$ -coûts de transaction (frais administratifs)
-concave, non positive, $g(0) = 0$.
Par exemple: $g(c) = -\gamma|c|$

Problème d'Optimisation

$$
P(\mathbb{X}_0)\left\{\begin{array}{ll}
\max\limits_{c^i,\ x^i, x^i \in \ell^\infty_+} & \sum_{t=0}^{\infty} b^t \left[\sum_{i=1}^{k} U^i(c^i_t) + W(a_t, c_t) + g(c_t)\right] \\
\text{s.t.} & \sum_i x^i_{1,t+1} = \sum_i c^i_t + c_t \\
 & a_{t+1} = a_t + c_t \\
 & + \text{croissance} \\
 & + \text{condition initiale}
\end{array}\right.
$$

Observation

La fonction objective est continue et concave mais non-differentiable!

Points stationnaires

Soit : $\Delta^* =$ l'ensemble des états soutenables

$\Delta^p =$ l'ensemble des états dont la traj. optimale est un GPC

Proposition (A.P. '07)

- $\Delta^* = \left\{ \mathbb{X}_a^*, \; a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,] \right\}$ avec $[\,\underline{a}, \overline{a}\,] \subseteq [0, S]$
- On caractérise Δ^p. (Excepte $\overline{a} = S$)
- Remarque : Seuls les $a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,]$ admettent GPCs
  $\Rightarrow \Delta^p \subseteq \{\mathbb{X}/a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,]\}$

Points stationnaires

Soit : $\Delta^* =$ l'ensemble des états soutenables

$\Delta^p =$ l'ensemble des états dont la traj. optimale est un GPC

Proposition (A.P. '07)

- $\Delta^* = \left\{ \mathbb{X}_a^*,\ a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,] \right\}$ avec $[\,\underline{a}, \overline{a}\,] \subseteq [0, S]$
- On caractérise Δ^p. (Excepte $\overline{a} = S$)
- Remarque : Seuls les $a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,]$ admettent GPCs
  $\Rightarrow \Delta^p \subseteq \{\mathbb{X}/a \in [\,\underline{a}, \overline{a}]\}$

Convergence asymptotique

Théorème (A.P. '07)

W concave stricte en c ou trajectoire gloutonne

$$\lim_{t\to\infty} c_t = 0 \wedge \lim_{t\to\infty} a_t = a$$

W linéaire en c

$$c_t = 0 \wedge a_t = a \quad \forall t \geq 2 \max_i n^i$$

Un problème de surface fixe

1. $\lim_{t\to\infty} dist(\mathbb{X}_t, \Delta^p_a) = 0$ (Δ^p_a = *l'ensemble de GPC dont la surface occupée est a*)
2. *Si m.c.d($n^1, \ldots, n^s$) = 1:* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{X}_t = \mathbb{X}^*_a$

Convergence asymptotique

Théorème (A.P. '07)

W concave stricte en c ou trajectoire gloutonne

$$\lim_{t\to\infty} c_t = 0 \wedge \lim_{t\to\infty} a_t = a$$

W linéaire en c

$$c_t = 0 \wedge a_t = a \quad \forall t \geq 2\max_i n^i$$

Un problème de surface fixe

1. $\lim_{t\to\infty} dist(\mathbb{X}_t, \Delta_a^p) = 0$ *(Δ_a^p = l'ensemble de GPC dont la surface occupée est a)*
2. *Si m.c.d($n^1, \ldots, n^s$) = 1:* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{X}_t = \mathbb{X}_a^*$

Scheme

1. Review
2. Forêt de plusieurs espèces
   - Modèle et problème d'optimisation
   - Convergence globale
3. Marché de la terre
   - Modèle et problème d'optimisation
   - Convergence globale
4. Conclusion

Conclusion

- On étudie un problème intertemporel de distribution des ressources en temps discret, représentant le problème de coupe optimale d'une forêt de plusieurs espèces.

- On caractérise l'équilibre et sa stabilité
- quand :
  - la forêt a plusieurs espèces et pour des trajectoires arbitraires,
  - avec et sans l'actualisation de bénéfices futurs et
  - un marché de la terre est introduit.

Une ligne de recherche possible :

L'étude de ce problème dans le cadre de la *viabilité*.

Conclusion

- On étudie un problème intertemporel de distribution des ressources en temps discret, représentant le problème de coupe optimale d'une forêt de plusieurs espèces.

- On caractérise l'équilibre et sa stabilité
- quand :
  - la forêt a plusieurs espèces et pour des trajectoires arbitraires,
  - avec et sans l'actualisation de bénéfices futurs et
  - un marché de la terre est introduit.

Une ligne de recherche possible :

L'étude de ce problème dans le cadre de la *viabilité*.

Merci !