Exercices sur les fonctions de deux variables.

Attention dans la suite le symbole « → » a pu être remplacé par erreur par le symbole « α »

1. Etudier les dérivées partielles et la continuité à l'origine de la fonction définie par la formule suivante :

$f(x,y) = \dfrac{yx^2}{x^4 + y^2}$ et $f(0,0)=0$. f est elle différentiable à l'origine ?

2. Pour quelles valeurs des entiers p et q peut on prolonger par continuité à l'origine la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}$?

3. a) Etudier la continuité de la fonction f définie par la formule :

$f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^4} e^{-\frac{y^2}{x^4}}$ si $x \neq 0$, $f(x,y)=0$ sinon.

b) Montrer que f est dérivable suivant toutes les directions en (0,0). Est elle

différentiable en (0,0) ?

4. Etudier la limite en (0, 0) de $f(x,y) = \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2 + y^2}$

5. Etudier la continuité et l'existence de dérivées partielles à l'origine pour la fonction définie par : $\forall (x,y) \neq (0,0) \quad f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ et $f(0,0) = 0$

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ et $f(0,0) = 0$

a) Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudier l'existence et la valeur de : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y) \to f(x, y)=5x^2+2y^2-2xy-6x-6y+10$
Montrer que f admet un minimum.

8. Etudier les extréma éventuels de la fonction définie par la formule :

$f(x, y)=x(y^2+(\ln(x))^2)$.

9. Pour une fonction f de deux variables C1 sur $\mathbb{R}^2$ déterminer en fonction des dérivées partielles de f l'expression de la dérivée ou de la jacobienne des fonctions composées suivantes:

a) $x \to f(\frac{1}{x}, x^2+5x)$ b) $(u, v) \to f(u^2-v^2, 2u.v)$ c) $(x,y,t) \to f(x, f(y, \ln(t)))$

10. On désigne par f une fonction de deux variables, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
On lui associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y) \to g(x, y)= f(2x-y, x+2y)$

a) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g à partir de celles de f.

b) Peut on choisir f de façon que $\frac{\partial g}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial x}$?

11. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.

1) a) Montrer que les solutions C1 sur U de l'Edp $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ sont de la forme $(x,y) \to h(x)$ avec h une fonction C1 sur un intervalle à déterminer

b) Montrer que si U n'est plus supposé convexe ce n'est plus forcément vrai. (On pourra considérer sur $\mathbb{R}^2$ privé d'une demi droite bien choisie la fonction $(x,y)\to x^2$ si $x,y>0$, $-x^2$ si $y<0$ et $x>0$, 0 sinon.)

2) En faisant le changement de variable $(u,v)=(x+y,x-y)$ déterminer sur U les solutions C1 de l'Edp $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$