Pourquoi le plan conforme ?

AI 2016/2017

Définition 0.1

> *Soit un point fixe O, et $k \in \mathbb{R}^*$.*
> *On appelle inversion de centre O de rapport k la transformation ponctuelle, qui, à un point M quelconque, fait correspondre le point M' de la droite (OM) tel que :*
> $$\overline{OM}.\overline{OM'} = k.$$

Exercice 1 : Soient M et P deux points non alignés, distincts de O.
Que peut-on dire des quatre points M, M', P, P' ?

Exercice 2 Soit, dans l'inversion $I(O, k)$, les inverses A', B' de deux points A, B distincts de O. Montrer que

$$A'B' = |k|\frac{AB}{OA.OB}$$

Exercice 3 :

1. Chercher les points invariants d'une inversion.
2. Quel est le produit de deux inversions de même centre ?
3. Quel est le produit d'une inversion et d'une homothétie de même centre ? Est-il commutatif ?

Exercice 4 :
On considère dans le plan l'inversion $I(O, k)$, les points A, B, M distincts de O, et leurs inverses A', B', M'.

1. Montrer que l'on a $(OA, OB) - (MA, MB) \equiv (M'A', M'B')[\pi]$.
2. Montrer que l'on a $\frac{M'A'}{M'B'} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{OB}{OA}$.

Exercice 5 :

1. Déterminer l'inverse d'une droite par une inversion.
2. Déterminer l'inverse d'un cercle passant par le centre de l'inversion.

Exercice 6 :
Soit un cercle et une droite donnés. Déterminer les inversions telles qu'ils soient inverses.

Exercice 7 :
Déterminer l'inverse d'un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion.
Quels sont les cercles qui sont globalement invariants par une inversion ?

Exercice 8 :
Soit dans un triangle ABC, H, K les pieds des hauteurs issues de B et C. Montrer que la droite HK est parallèle à la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 9 :
Soit un cercle $C(O, R)$, un point fixe S non situé sur le cercle, et AB un diamètre variable de (C).

1. Montrer que le cercle circonscrit au triangle SAB passe par un deuxième point fixe I.
2. SA et SB recoupent le cercle (C) respectivement en M et N. Montrer que la droite MN passe par un point fixe E.
3. Montrer que le cercle SMN passe par un deuxième point fixe J.

Exercice 10 :
Soient deux cercles donnés $C(I, R)$ et $C'(I', R')$. Trouver toutes les inversions pour lesquelles ils sont inverses.