Sance du 13 dcembre 2013

AI 2013/2014

Préambule.

Dant tout le problème, on note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.. L'application $(u,v) \longmapsto < u, v > = \displaystyle\int_0^1 u(x)v(x)dx$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. On note $|| \ \ ||$ la norme (préhilbertienne) associée, et $|| \ \ ||_\infty$ la norme Sup usuelle ($||f||_\infty = Sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$. Selon les questions, on munira E d'une de ces deux normes. On rappelle, à ce propos, que E n'étant pas de dimension finie, les normes n'ont pas de raisons particulières d'être équivalentes.
On appelle symbole de Kronecker l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\{0,1\}$ qui à (i,j) associe $\delta_{i,j}$ qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon.

1. Rappeler et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la norme $|| \ \ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit $f_p \in E$ la fonction qui vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2} - 2^{-p}]$, 1 sur $[\frac{1}{2} + 2^{-p}, 1]$, et qui est affine sur $[\frac{1}{2} - 2^{-p}, \frac{1}{2} + 2^{-p}]$.
   (a) Donner l'expression exacte de f_p.
   (b) Montrer que la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de cauchy de $(E, || \ \ ||)$.
   (c) On suppose que $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $(E, || \ \ ||)$ vers f. Soit $a < \frac{1}{2}$. Montrer que
   $$\lim_{p\longrightarrow+\infty} \int_0^a |f_p(x) - f(x)|dx = 0.$$
   (d) Montrer un résultat analogue pour $b > \frac{1}{2}$.
   (e) En déduire que $(E, || \ \ ||)$ n'est pas complet.

3. On considère l'application $\epsilon_{\frac{1}{2}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u(\frac{1}{2}) \end{array}$.

   Cette application est-elle continue au sens de la norme $|| \ \ ||$ de E ?

   Indication : on pourra introduire pour $p \in \mathbb{N}^*$ l'application φ_p de E qui vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2} - 2^{-p}] \cup [\frac{1}{2} + 2^{-p}, 1]$, qui vaut 1 en $\frac{1}{2}$, et qui est affine sur $[\frac{1}{2} - 2^{-p}, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2^{-p}]$. (Fonction "pic").

4. Soit $a \in [0,1]$, et $\epsilon_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u(a) \end{array}$. Généraliser le résultat de la question précédente.

   Ces fonctions ϵ_a sont appelées les masse de Dirac au point a.

5. Soient f dans E et K dans $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$.
   Montrer que l'application $\psi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(y)dy \end{array}$ appartient à E.

6. Soit g dans E, K dans $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R})$, et λ un réel. Montrer que, lorsque $|\lambda|$ est "petit" dans un sens à préciser, il existe un et un seul élément f de E tel que :

$$(\forall x \in [0,1]), \left(f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y)f(y)dy = g(x) \right).$$

Indication : on rappelle que $(E, || \ ||_\infty)$ est un espace de Banach (complet), et que tout application contractante sur un Banach admet un unique point fixe (Théorème de Picard).

7. Soient K, L dans $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : (x,y) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 K(x,s)L(y,t)dsdt$ de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue, ainsi que $(x,y) \longmapsto \int_0^1 K(x,t)L(y,t)dt.$.

Indication : On pourra utiliser la question 5.

Partie I : Noyaux itérés et constantes de Schwartz

On appelle Noyau une application continue symétrique de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des noyaux, et $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}\backslash\{0\}$.
Soit $K \in \mathcal{N}$, et on pose $K_1 := K$.

1. Montrer, avec soin, l'existence et l'unicité d'une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{N}$, de premier terme K_1 et telle que :

$$(\forall (x,y,n) \in [0,1]^2 \times \mathbb{N}^*), (K_{n+1}(x,y) = \int_0^1 K_n(x,t)K(y,t)dt).$$

Indication pour la symétrie de K_{n+1} : pour $n \geq 2$, $K_n(y,t) = K_n(t,y) = \displaystyle\int_0^1 K_{n-1}(t,s)K(y,s)ds$.

2. En particulier $K_2(x,y) = \displaystyle\int_0^1 K(x,t)K(y,t)dt$.

   Montrer, pour n, p dans $\mathbb{N}^*$, x, y dans $[0,1]$, $K_{n+p}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 K_n(x,t)K_p(y,t)dy$. On pourra, pour un n fixé faire une récurrence sur p.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{K,n} = I_n := \displaystyle\int_0^1 K_n(x,x)dx$.

   (a) Montrer pour p, n dans $\mathbb{N}^*$, $I_{n+p} = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 K_n(x,t)K_p(x,t)dxdt$, et $I_{2n} \geq 0$.

   (b) Montrer pour p, n dans $\mathbb{N}^*$, $I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$ et $I_{2n+2}^2 \leq I_{2n}I_{2n+4}$.

4. On suppose désormais $K \in \mathcal{N}^*$.

   (a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}^*$: $I_{2n} > 0$. Il est conseillé, en raisonnant par l'absurde, de considérer $N = min\{p \in \mathbb{N}^*/I_{2p} = 0\}$, avec donc $N \geq 1$, et aboutir à une contradiction en distinguant les cas N pair et N impair.

   (b) Majorer pour p, q dans $\mathbb{N}^*$, $K_{p+q}^2(x,y)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 K_p^2(x,t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 K_q^2(y,s)ds$.

(c) En déduire, pour p, q dans $\mathbb{N}^*$, $I_{2p+2q} \leq I_{2p} I_{2q}$.

(d) Montrer que la suite de terme général $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$, pour $n \geq 1$ est croissante et majorée. On notera l_K sa limite..

(e) Etudier la monotonie de la suite de terme général $\frac{I_{2p}}{l_K^p}$, pour $p \geq 1$. En déduire sa convergence vers un réel $m_K \geq 1$.

(f) Déterminer les réels l_K et m_K lorsque K est le noyau $(x, y) \longmapsto x + y$.

Partie II : Théorie spectrale élémentaire pour les noyaux

1. Soient φ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $K \in \mathcal{N}^*$.

On dit que φ est une **fonction propre de** K, associée à la **valeur propre** λ, lorsque :

$$\begin{cases} \varphi \neq 0 \\ (\forall x \in [0,1]), (\varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt). \end{cases}$$

On note ici $S(K)$ l'ensemble des valeurs propres de K (le "spectre" de K).

(a) Soient λ_1, λ_2 des éléments distincts de $S(K)$, et φ_1, φ_2 des fonctions propres associées. Montrer que l'on a $\displaystyle\int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$.

(b) i. Montrer que $(\forall \lambda \in S(K)), (\overline{\lambda} \in S(K))$.

ii. En déduire $S(K) \subset \mathbb{R}^*$.

On note désormais, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_{K,\lambda} = E_\lambda$ l'ensemble des éléments φ de E tels que $(\forall x \in [0,1]), (\varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt)$.

(c) Montrer que $\lambda \in S(K)$ si et seulement si E_λ est un sous-espace vectoriel de E non nul.

(d) i. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ dans $S(K)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ dans $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_N}$ respectivement, tels que pour i, j dans $[\![1, N]\!]$, $< \varphi_i, \varphi_j >= \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). A l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^1 \left(K(x,t) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right)^2 dt,$$

et du signe de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, montrer l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-2} \leq I_2.$$

ii. Montrer, pour $\alpha > 0$, que $S(K) \cap [-\alpha, \alpha]$ est fini. En déduire que $S(K)$ est au plus dénombrable.

Lorsque $S(K)$ est strictement dénombrable, il existe au moins une bijection $n \longmapsto \lambda_n$ de $\mathbb{N}^*$ sur $S(K)$ telle que $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n| \leq \ldots$.

Expliquer pourquoi, et montrer alors la convergence de la série de terme général λ_n^{-2}.

iii. En utilisant encore II.1.d.i, montrer que E_λ est de dimension finie, inférieure à $\lambda^2 I_2$.

(e) **Valeurs propres de K, et noyaux itérés**.

i. Montrer, pour λ réel : $E_{K,\lambda} \subset E_{K_2,\lambda^2}$. En déduire $(\forall \lambda \in S(K)), (\lambda^2 \in S(K_2))$.

ii. Soient λ dans $S(K_2)$ et φ dans $E_{K_2,\lambda} \backslash \{0\}$. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, on note Ψ_a l'élément de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ défini par $\Psi_a(x) = \varphi(x) + a \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt$.

Expliciter $\displaystyle\int_0^1 K(x,s)\Psi_a(s)ds$ à l'aide de $\Psi_a(x), \varphi(x), a$ et λ.

iii. Déduire, avec soin, de ce qui précède les résultats suivants :

A. $S(K_2) \subset \mathbb{R}^{*+}$,

B. Pour tout λ dans $S(K_2)$, $\sqrt{\lambda}$ ou $-\sqrt{\lambda}$ est dans $S(K)$, avec $E_{K_2,\lambda} = E_{K,\sqrt{\lambda}} \oplus E_{K,-\sqrt{\lambda}}$.

2. **Existence de valeurs propres** Jusqu'ici, on ignore si K possède effectivement des valeurs propres. On introduit la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de noyaux définie par $\Phi_n(x,y) := \dfrac{K_{2n}(x,y)}{l_K^n}$.

(a) Soient n, m des entiers tels que $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}^*$, et x, y des réels dans $[0,1]$. Montrer l'inégalité suivante :

$$|\Phi_{m+n}(x,y) - \Phi_n(x,y)|^2 \leq \left\{ \frac{I_{4m+4n-4}}{l_k^{2m+2n-2}} - 2\frac{I_{2m+4n-4}}{l_K^{m+2n-2}} + \frac{I_{4n-4}}{l_K^{2n-2}} \right\} . \left\{ \frac{1}{l_K^2} \int_0^1 \int_0^1 (K(x,s)K(y,t))^2 \, dsdt \right\}$$

(b) En déduire que la suite Φ_n converge uniformément sur $[0,1]^2$ lorsque n tend vers l'infini vers son noyau Ψ.

Montrer, pour (x,y) dans $[0,1]^2$, $\Psi(x,y) = l_K^{-1} \displaystyle\int_0^1 K_2(x,t)\Psi(y,t)dt$.

Montrer $\displaystyle\int_0^1 \Psi(s,s)ds = m_K$.

(c) Montrer, avec ce qui précède que l'on a $\dfrac{1}{l_K} \in S(K_2)$, puis $S(K) \neq \varnothing$.

Illustrer ces résultats dans le cas où $K(x,y) = x + y$.

Partie III Systèmes totaux et représentations des noyaux.

Pour K dans $\mathcal{N}^*$, il est clair que $S(K)$ et $S(K_2)$ sont simultanément infinis.
On note désormais $\mathcal{N}^{**}$ l'ensemble des noyaux K de $\mathcal{N}^*$ tels que $S(K)$ soit infini.

1. **Systèmes totaux** Lorsque K appartient à $\mathcal{N}^{**}$, une suite φ_n, $n \geq 1$ dans E est appelée un **système K-total** lorsque

(a) pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, φ_n est une fonction propre de K.

(b) $(\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2}), (<\varphi_i, \varphi_j>= \delta_{i,j})$

(c) $Vect(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \oplus_{\lambda \in S(K)} E_{K,\lambda}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note alors $\mu(K,\varphi,n) = \mu_n$ la valeur propre de K associée à φ_n.

(a) Montrer l'existence de systèmes K-totaux. Décrire tous les systèmes K-totaux.

(b) Montrer qu'un système K-total est K_2-total. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, comparer $\mu(K,\varphi,n)$ et $\mu(K_2,\varphi,n)$.

(c) **Premier théorème de représentation** Lorsque K est dans $\mathcal{N}^{**}$, et que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système K-total, on note $U_{K,\varphi,n} = U_n$ l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $U_n(x,y) = \mu_n^{-1}\varphi_n(x)\varphi_n(y)$, et on dit que

$\sum U_n$ est la série de fonctions associée à K, et à $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On suppose (H) $\sum U_n$ **converge uniformément sur** $[0,1]^2$**.**

i. Montrer que $L = K - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ appartient à $\mathcal{N}$. On suppose de plus que $L \in \mathcal{N}^*$.

ii. Soit ψ dans E une fonction propre de L pour la valeur propre ν. Montrer successivement :
$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(<\psi,\varphi_n>=0)$; ψ est une fonction propre de K pour la valeur propre ν ; $\psi = 0$.

iii. Enoncer le résultat obtenu sous forme de théorème.

2. **Second théorème de représentation et théorème intégral de Hilbert**.

On donne ici K dans $\mathcal{N}^*$, un système K-total $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour f dans E, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n(f) =< f,\varphi_n >$.

(a) Montrer que la série de terme général $a_n^2(f)$ converge et que sa somme est majorée par $||f||^2$.

(b) Soient x dans $[0,1]$, et $\mathcal{P}$ une partie fermée non vide de $\mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité :

$$\left(\sum_{n\in\mathcal{P}} \mu_n^{-1}a_n(f)\varphi_n(x)\right)^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathcal{P}} a_n^2(f)\right)\left(\int_0^1 K^2(x,t)dt\right).$$

en déduire que la série de fonctions de terme général $\mu_n^{-1}a_n(f)\varphi_n$ converge absolument et uniformément sur $[0,1]$.

(c) Enoncer avec précision les résultats des deux questions précédentes lorsque $f = K(.,y)$, pour y donné dans $[0,1]$.

(d) Soient x,y dans $[0,1]$. En utilisant ce qui précède, montrer successivement :

$$K_4(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-4}\varphi_n(x)\varphi_n(y); \tag{1}$$

puis

$$K_2(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-2}\varphi_n(x)\varphi_n(y). \tag{2}$$

On pourra estimer $\displaystyle\int_0^1 \left(K_2(x,y) - \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-2}\varphi_n(x)\varphi_n(y)\right)^2 dx.$

(e) Déduire de (2) que l'on a, pour f dans E, l'équivalence :

(*) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(< f,\varphi_n >= 0)$

(**) $(\forall x \in [0,1])(\int_0^1 K(x,t)f(t)dt = 0)$.

On dit alors que f est orthogonale à K.

(f) Soient f dans E, et g l'élément de E (justifier) défini par :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-1} a_n(f)\varphi_n(x) - \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

i. Montrer que la fonction g est orthogonale à K.

ii. En déduire $\int_0^1 g^2 = 0$, puis $g = 0$.

(g) **Egalité de Hilbert**.
Pour u, v éléments de E, montrer :

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x,y)u(x)v(y)dxdy = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-1} < u, \varphi_n >< v, \varphi_n > .$$

3. **Noyaux positifs et théorème de Mercer**.

(a) Pour K dans $\mathcal{N}^{**}$, montrer

$$(\alpha) S(K) \subset \mathbb{R}^{*+} \iff (\beta)(\forall f \in E)(\int_0 \int_0^1 K(x,y)f(x)f(y)dxdy \geq 0).$$

Un tel noyau est dit positif.
Montrer qu'un noyau positif K vérifie $(\forall x \in [0,1])(K(x,x) \geq 0)$.

(b) Soient K un noyau positif, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système K-total, et toujours $\mu_n = \mu(K, \varphi, n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour N dans $\mathbb{N}^*$, soit L_N l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$L_N(x,y) = K(x,y) - \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-1} \varphi_n(x)\varphi_n(y).$$

i. Montrer que L_n est un noyau positif. Montrer l'existence d'une constante C telle que

$$(\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1])(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^{-1} \varphi_n^2(x) \leq C).$$

Qu'en déduisez vous ?

ii. Pour y fixé dans $[0,1]$, montrer que la série de fonction de terme général $\mu_n^{-1}\varphi_n(y)\varphi_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Qu'en est-il de la convergence absolue ?

iii. Déduire de ce qui précède l'égalité de Mercer :

$$(\forall (x,y) \in [0,1]^2)(K(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{-1} \varphi_n(y)\varphi_n(x)).$$

Il est conseillé d'intégrer pour montrer que la différence est nulle.