Réduction des endomorphismes

Dans toute la suite on se place dans $(E, +, .)$ un K-espace vectoriel. Sauf indication contraire, f désigne un endomorphisme de E.

1 En dimension quelconque

1.1 Généralités

Définition 1.1

Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est une valeur propre de f si $Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{O\}$. Cet ensemble est alors appelé espace propre associé à la valeur propre λ. Remarquons qu'il est équivalent de dire que $f - \lambda Id_E$ est non injective.

Définition 1.2

Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est valeur spectrale de f si $f - \lambda Id_E$ est non bijective. On appelle spectre de f l'ensemble des valeurs spectrales de f : c'est un sous-ensemble de K.

Remarquons tout de suite qu'en dimension finie, valeurs propres et valeurs spectrales sont confondues. Cela explique que pour la majeure partie d'entre vous, le spectre soit l'ensemble des valeurs propres.
En effet, en dimension finie, le théorème du rang assure l'équivalence entre injectivité et bijectivité. Ce n'est pas le cas en dimension infinie. Donc une valeur propre est toujours dans le spectre, mais on peut trouver dans le spectre d'un endomorphisme, en dimension infinie, d'autres scalaires que les valeurs propres.
Remarquons que 0 **est valeur propre si et seulement si** $Ker(f) \neq \{0\}$.

Proposition 1.1

1. *Les sous-espaces propres de f sont stables par f.*
2. *Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.*

1.2 Polynôme d'endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $p \in \mathbb{N}$, on définit la notation f^p suivante par récurrence :

$$\begin{array}{rcll} f^0 & = & Id_E & \\ f^1 & = & f & \\ f^{p+1} & = & f^p \circ f & \forall p \in \mathbb{N} \end{array}$$

Remarquons que la deuxième ligne est redondante.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on introduit $\varphi_u : \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \end{array}$.

Théorème 1.2

φ_u est un morphisme d'algèbre.

Ce théorème est un des théorème les plus importants et des plus méconnus de l'algèbre linéaire. On déduit de ce théorème que $Ker(\varphi_u)$ est un idéal de $K[X]$. Si ce n'est pas l'idéal nul, il est principal.

Définition 1.3

Si $Ker(\varphi_u) \neq \{0\}$, alors il existe un unique polynôme unitaire qui engendre $Ker(\varphi_u)$. On l'appelle polynôme minimal de u, et on le note μ_u.
On appelle polynôme annulateur tous les éléments de $Ker(\varphi_u)$.

Proposition 1.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit P un polynôme annulateur de u. Soit λ une valeur propre de u, alors λ est racine de P.

Preuve de la Proposition 1.3:
Soit x un vecteur propre non nul de u associé à λ. Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$. Alors

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k x \\ &= \tilde{P}(\lambda) x \end{aligned}$$

Comme x est non nul, on en déduit que λ est une racine de P.

$\blacksquare$

Proposition 1.4

Soit f un endomorphisme qui admet un polynôme minimal μ_f.
Soit λ une racine de μ_f. Alors λ est valeur propre de f.

Preuve de la Proposition 1.4:
On pose $\mu_f(X) = (X - \lambda)P(X)$. P n'est pas un polynôme annulateur de f : soit $x \in E$ tel que $P(f)(x) \neq 0$. On pose $y = P(f)(x)$.
$\mu_f(f)(x) = 0 \Longrightarrow (f - \lambda Id_E)(y) = 0$. Donc y est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

■

Par conséquent, dès que le polynôme minimal existe, les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal.

1.3 Théorème de décomposition des noyaux

Ce théorème est important : d'une part par son utilisation, essentielle pour la réduction des endomorphismes, d'autre part par sa preuve, basée sur le théorème de Bezout. C'est donc un outil à bien connaitre.

Théorème 1.5 (de décomposition des noyaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = P_1P_2$, avec $P_1 \wedge P_2 = 1$. Alors

$$Ker(P(f)) = Ker(P_1(f)) \oplus Ker(P_2(f)).$$

Ce théorème se généralise à un produit de n polynômes premiers entre eux deux à deux, on a alors

$$Ker(P(f)) = Ker(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus Ker(P_n(f)).$$

Preuve du Théorème 1.5:
Remarquons tout de suite que la généralisation s'obtient à l'aide d'un récurrence élémentaire et du fait que si un polynôme est premier avec deux autres polynômes, il est premier avec leur produit.
Voyons maintenant la première égalité. P_1 et P_2 étant premier entre eux, il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$, tel que

$$UP_1 + VP_2 = 1$$

Traduit en termes de polynômes d'endomorphismes en f, on a

$$U(f) \circ P_1(f) + V(f) \circ P_2(f) = Id_E. \qquad (1)$$

Remarquons ici que tous les polynômes d'endomorphisme en f commutent entre eux.
Soit $x \in Ker(P_1(f)) \cap Ker(P_2(f))$, alors de (1), on déduit que x est nul. Ces deux sous-espaces sont en somme directe.
Soit maintenant $x \in Ker(P(f))$. (1) assure que $x = U(f) \circ P_1(f)(x) + V(f) \circ P_2(f)(x)$.

Le premier terme est dans $Ker(P_2(f))$. En effet

$$\begin{aligned} P_2(f)[U(f)\circ P_1(f)(x)] &= [U(f)\circ P_1(f)\circ P_2(f)](x) \\ &= U(f)[P(f)(x)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, le deuxième terme est élément de $Ker(P_1(f))$. On retrouve donc bien que $Ker(P(f))$ est somme de ces deux sous-espaces.

■

2 En dimension finie

Dans toute la suite, E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Polynôme d'endomorphisme

Théorème 2.6

Tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ admet un polynôme minimal.

Preuve du Théorème 2.6:
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Il suffit de montrer que $Ker(\varphi_f) \neq \{0\}$. Considérons la famille $f^0, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$. C'est une famille de cardinal n^2+1 dans un espace vectoriel de dimension n^2 : elle est liée. Soit donc $(\alpha_i)_{i\in[\![0,n^2]\!]}$ une famille non nulle telle que

$$\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Alors le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$ est un polynôme annulateur de f : il est dans $Ker(\varphi_f)$.

■

Effectuons un certain nombre de remarques préliminaires. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
$\tilde{\chi}_A(0) = det(A)$.
La première remarque assure que si l'on considère un endomorphisme de E, toutes les matrices qui le représentent ont même polynôme caractéristique.

Définition 2.4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice qui représente f.

Comme on travaille sur les polynômes, on va être amené à considérer les fonctions polynômes. Si le corps K est infini, on identifie polynômes et fonctions polynômes. Si c'est un corps fini, cela va poser de gros problèmes.
Regardons de plus près. On se place dans $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $X(X^2+1)$. Il admet 0 et 1 comme racines (si vous préférez, la fonction polynôme associée est la fonction nulle). Un calcul rapide vous montre que 1 n'est pas valeur propre.
Il convient donc de se placer dans des corps infinis.
Dans toute la suite, K est un corps infini. On identifiera polynôme et fonction polynôme.

Théorème 2.7

λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de f.

Preuve du Théorème 2.7:
Cela est du au fait que $f - \lambda Id_E$ est bijective si et seulement si son déterminant est non nul.

$\blacksquare$

Corollaire 2.8

Les racines du polynôme minimal et celles du polynôme caractéristique sont confondues.

En fait, on veut légèrement plus que cela.

Théorème 2.9 (Cayley-Hamilton)

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Preuve du Théorème 2.9:
Nous allons utiliser pour cela les **matrices compagnons**. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $P_A(X) = (-1)^p(X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_1 X + a_0)$.

Le plus simple pour montrer ce résultat est de développer le déterminant selon la dernière colonne.
Soit maintenant un vecteur x non nul de E. Montrons que $\chi_f(f)(x) = 0$. Cela suffira pour affirmer que χ_f est un polynôme annulateur de f.
Soit p le plus petit entier tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ soit liée. $p \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est donc libre, et le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est stable par f. Remarquons tout de suite que dans l'écriture de la dépendance de la famille $(x, \ldots, f^p(x))$, le coefficient de $f(x)$ est non nul : soit $(a_i)_{i \in [\![1,p-1]\!]}$ telle que

$$f^(x) + a_{p-1}f^{p-1}(x) + \ldots + a_1 f(x) + a_0 x = 0.$$

Dans la base $(x, \ldots, f^{p-1}(x)$, la matrice de la restriction de f est A, la matrice compagnon du polynôme $X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.
On complète notre famille libre en une base de E. Alors la matrice de f dans cette base s'écrit par blocs

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right).$$

Donc $\chi_f(X) = P_A(X)\chi_C(X)$. Comme $P_A(f)(x) = 0$, on en déduit que $\chi_f(f)(x) = 0$.
■

Exemple *Considérons un endomorphisme nilpotent. Alors nécessairement, son polynôme minimal est une puissance de X, et donc son polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$.*

2.2 Trigonalisation

Définition 2.5

Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est une matrice triangulaire.

Théorème 2.10

f est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Preuve du Théorème 2.10:
Quitte à passer dans un surcorps algébriquement clos, remarquons que le polynôme caractéristique étant un polynôme annulateur ayant exactement les mêmes racines que le polynôme minimal, le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique l'est.
Une condition équivalente à la trigonalisation d'un endomorphisme est donc **que le polynôme caractéristique sois scindé**.
C'est cette caractérisation que nous allons prouver.
Si l'on suppose f trigonalisable, on utilise la matrice dans cette base pour calculer le polynôme caractéristique, que l'on trouve donc scindé. En fait, on a mieux :

les valeurs propres sont exactement les éléments de la diagonale de la matrice triangulaire, une valeur propre apparaissant autant de fois que son ordre de multiplicité dans la diagonale.
Pour l'implication inverse (condition suffisante), nous allons procéder par récurrence sur la dimension de l'espace. On considère $\mathcal{P}_n$ la propriété "toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice triangulaire supérieure".

Initialisation : La propriété est manifestement vraie au rang 1.

Transmission : On suppose la propriété vraie au rang $n-1$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que son polynôme caractéristique est scindé. On note f l'endomorphisme de E associé à A.
Soit λ une valeur propre de f, et $e_1 \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre non nul. On complète e_1 par $e_2, \dots, e_n$ en une base de E. La matrice de f dans cette nouvelle base est de la forme

$$Q := \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & \times & \dots & \times \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
On applique l'hypothèse de récurrence à M, et on note P la matrice de passage, i.e $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.
Alors

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)^{-1} Q \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & \times & \dots & \times \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1}MP & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On reconnait une matrice triangulaire. Si la matrice de f dans une base correcte est semblable à une matrice triangulaire, c'est que A aussi, et la propriété de récurrence est vraie au rang n.

Conclusion or cette propriété est vraie au rang 1, donc elle est vraie à tout ordre.

■

Par conséquent, si on travaille sur un corps algébriquement clos, au hasard **sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable**.
Remarquons aussi que si f est trigonalisable, et que si F est un sous-espace stable par f, alors $f|_F^F$ est aussi trigonalisable.

2.3 Diagonalisation

Définition 2.6

> *Un endomorphisme f est dit diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.*
> *On remarque alors que dans cette base, sa matrice est diagonale.*

Une première remarque consiste en le lemme suivant :

Lemme 2.11

Soit λ une valeur propre de f, et $h \in \mathbb{N}^*$ son indice de multiplicité dans χ_f. Alors $dim(E_\lambda) \leqslant h$.

Preuve du Lemme 2.11:
On utilise la stabilité du sous-espace propre E_λ par f. On prend une base de E_λ qu'on complète en une base de E. Dans cette base, la matrice de f est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & A \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & B \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{array}\right)$$

On trouve donc que $(X-\lambda)^{dim(E_\lambda)}$ divise $\chi_f(X)$.

■

Cela donne le théorème classique suivant :

Théorème 2.12

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) χ_f est scindé, et pour chacune des valeurs propres, l'ordre de multiplicité dans χ_f est exactement la dimension du sous-espace propre,

(iii) il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de f telles que $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

La preuve est laissée à votre sagacité.
Cela nous amène au théorème principal :

Théorème 2.13

*Soit f un endomorphisme de E.
f est diagonalisable si et seulement si μ_f est scindé à racines simples.*

Remarquons que si P est un polynôme annulateur scindé à racine simple, alors f est diagonalisable, un cas particulier étant $P = \chi_f$.
Preuve du Théorème 2.13:
Supposons f diagonalisable, et considérons une base de vecteurs propres $e_1, \dots, e_n$, associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
On considère alors le polynôme $P(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_p)$. On a alors

$$P(f) = (f - \lambda_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_p Id_E).$$

Ce produit est commutatif. Pour chacun des vecteurs de base e_j, il existe un $k \in [\![1, p]\!]$, tel que ce vecteur soit associé ce λ_k. Alors

$$\begin{aligned} P(f)(e_j) &= g \circ (f - \lambda_k Id_E) \\ &= g(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc P est un polynôme annulateur scindé à racine simple, et μ_f divise P. On a bien notre conclusion. Remarquons au passage que $P = \mu_f$. Réciproquement, supposons que μ_f est scindé à racines simples.
On a donc $\mu_f(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$. Dans ce produit, les facteurs sont premiers entre eux deux à deux. En appliquant le théorème de décomposition des noyaux, on trouve que

$$Ker\mu_f(f) = Ker(f - \lambda_1 Id_E) \oplus \dots \oplus Ker(f - \lambda_p Id_E).$$

Or $Ker(\mu_f(f) = E$, et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $Ker(f - \lambda_i Id_E) = E_{\lambda_i}$. Donc E s'écrit comme la somme directe de sous-espaces propres : f est diagonalisable.

$\blacksquare$

On retrouve aussi le même résultat que pour la trigonalisation. Si F est un sous-espace stable par f, et que f est diagonalisable, alors la restriction complète de f à F est aussi diagonalisable.