Devoir 01

AI 2013/2014

Partie I

1. Soit H un hyperplan. Alors $H^{\perp}$ est non réduit à $\{0_{E^*}\}$. N'importe quel élément de $H^{\perp}$ convient.

   Réciproquement, soit $\Phi \in E^*$ une forme linéaire non nulle, et $H := Ker\Phi$. Introduisons D un supplémentaire de H dans E. Alors D est isomorphe à $Im\Phi$ (résultat connu en introduisant la restriction à D de Φ). Comme Φ est non nulle, $Im\Phi = \mathbb{C}$ et H est un sous-espace vectoriel de codimension 1 : c'est un hyperplan.

   Ces deux preuves n'ont pas fait intervenir le caractére fini de la dimension de E.

   Soient Φ et Ψ deux éléments de E^* de même noyau H. Soit $y \in E \backslash H$. On a $E = H \oplus Vect(y)$. Et Φ et Ψ ne s'annulle pas en y. On introduit $\mu = \Psi(y)\Phi - \Phi(y)\Psi$. Cette forme linéaire est nulle sur H et sur $Vect(y)$: c'est la forme nulle, et donc la famille Ψ, Φ est liée dans E^*.

2. Soit G un supplémentaire de $F_1 \cap F_2$ dans F_1. Alors

   $$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= F_2 + F_1 \cap F_2 + G \\ &= F_2 + G \end{aligned}$$

   puisque $F_1 \cap F_2 \subset F_2$.

   Soit $x \in G \cap F_2$. Alors $x \in G \Longrightarrow x \in F_1$, et donc $F_1 \cap F_2 \cap G$. Donc $x = 0_E$.

   G et F_2 sont donc supplémentaires, et

   $$\begin{aligned} dim(F_1 + F_2) &= dim(F_2) + dim(G) \\ &= dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2). \end{aligned}$$

3. Soit t une transvection de E.

   (a) Tout élément x de $H_1 + H_2$ s'écrit comme somme d'un élément de H_1 et d'un élément de H_2 : $x_1 + x_2$. Alors

   $$\begin{aligned} t(x) &= t(x_1) + t(x_2) \\ &= x_1 + x_2 \\ &= x \end{aligned}$$

   Comme $H_1 \neq H_2$, on en déduit que $dim(H_1 \cap H_2) < n - 1$, et quand on applique la question précédente, on trouve que $dim(H_1 + H_2) > n - 1$. Donc $E = H_1 + H_2$, et $t = Id_E$, ce qui n'est pas possible.

   (b) Soit $y \in E \backslash H$, on pose $a := t(y) - y \in H$.
   Alors, $\forall x \in H$, $t(x) - x = 0 \in Vect(a)$.

Soit $x \in Vect(y), \exists \lambda \in \mathbb{C}, y = \lambda a$, et $t(x) - x = \lambda a \in Vect(a)$.

Montrons maintenant l'unicité : soient D_1 et D_2 vérifiant (3). Il existe $x \notin H$, tel que $t(x) - x \neq 0$. Mais alors $t(x) - x \in D_1 \cap D_2$, qui est donc exactement de dimension 1, ce qui entraine que $D_1 = D_2$.

(c) Soit Φ un forme linéaire définissant H, soit $e_1 \in E \backslash H$, $e_2 := t(e_1) - e_1$. Alors, si l'on veut $t(e_1) = e_1 + \Phi(e_1)a$, comme $\Phi(e_1) \neq 0$, on pose $a := \Phi(e_1)^{-1} e_2$.

$\forall x \in H$, $t(x) = x$, et (4) est vérifiée.

$\forall x \in Vect(e_1)$, $t(x) = \lambda t(e_1) = \lambda e_1 + \Phi(\lambda e_1)a$. (4) est encore vérifiée.

(d) t est bien linéaire. Soit $x \in Ker(t)$. Alors $x + \Phi(x)a = 0$. Ce qui impose que $x \in Vect(a)$. On pose $x = \lambda a$, et comme $\Phi(a) = 0$, on en déduit $x = 0$.

t est donc injective, puis bijective puisque nous travaillons en dimension finie :

$$t \in GL(E).$$

$t(x) = x \Longleftrightarrow x \in Ker\Phi$. L'hyperplan de la transvection est donc le noyau de Φ et sa droite est $Vect(a)$.

4. Soit $\theta : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & T(H) \cap \{Id_E\} \\ a & \longmapsto & (x \longmapsto x + \Phi(x).a) \end{array}$.

Remarquons que $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b)$, et $\theta(0) = Id_E$.

Donc $T(H) \cap \{Id_E\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$. La surjectivité provient de la question 4.d.

Soit $a \in Ker\theta$. Alors $\forall x \in E, \Phi(x).a = 0_E$. Comme $\Phi \neq 0_{E^*}$, $a = 0$.

5. On écrit (2.c) $t_1(x) = x + \Phi_1(x)a_1$ et $t_2(x) = x + \Phi_2(x)a_2$. Ici, a_1 et a_2 sont non nuls, et Φ_1 et Φ_2 sont non nulles.

Alors $t_1 \circ t_2(x) = t_2 \circ t_1(x), \forall x \in E$ entraine que $\forall x \in E$,

$$\Phi_1(x)\Phi_2(a_1)a_2 = \Phi_2(x)\Phi_1(a_2)a_1.$$

Remarquons que si a_1 et a_2 sont liés, alors $\phi_1(a_2) = \Phi_2(a_1) = 0$.

Donc finalement, on trouve que les deux transvections commutent si et seulement si $\Phi_2(a_1) = \Phi_1(a_2) = 0$, ou ce qui revient exactement au même, $a_1 \in H_2$ et $a_2 \in H_1$.

Partie II

1. (a) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u, scindé à racines simples. u est donc diagonalisable, et son spectre est $\{1\}$ ($u = id$), $\{-1\}$ ($u = -Id$), ou $\{-1, 1\}$.

(b) oui

(c) Soit $a \in Ker(u - Id)\backslash\{0\}$, et soit $\Phi \in (Ker(u + Id))^{\perp}$ avec $\Phi(a) = 1$. Alors $\forall x \in E, \exists! x_2 \in Ker(u + Id)/x = \Phi(x)a + x_2$.Alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \Phi(x)a - x_2 \\ &= 2\Phi(x)a - x \end{aligned}$$

On pose $\theta(x) = 2\Phi(x)$.

Remarquons que $u(a) = a$ impose que $\theta(a) = 2$, ce qui entraine que , contrairement aux transvections, a n'est pas dans le noyau de θ.

(d) Soit donc t un transvection de la forme (I.4.c) $t(x) = x + \phi(x)a$, avec $a \in Ker\phi$.
On pose $u(x) = -x + \theta(x)a$, avec $theta(a) = 2$, et $v(x) = -x + \psi(x)a$, avec aussi $\psi(a) = 2$. On vérifie aisément que ce sont deux involutions minimales.
Alors le calcul de $u \circ v$ donne $u \circ v(x) = x + (\psi(x) - \theta(x)).a$. Donc pour que $u \circ v$ soit t, il suffit de choisir ψ et θ convenables pour que $\psi - \theta = \phi$. Est-ce possible ?
Soit $\nu\imath a^{\perp}$ tel que $\nu(a) = 2$. On pose alors $\theta = \nu - \frac{1}{2}\phi$ et $\psi = \nu + \frac{1}{2}\phi$.

2. Le déterminant d'une involution minimale est $(-1)^{n-1}$, donc de la question précédente, on déduit que le déterminant d'une transvection est 1.

3. On écrit $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1}(x) = x + \Phi(\sigma^{-1}(x))\sigma(a)$. On reconnait ici la transvection d'hyperplan $\sigma(H)$ et de droite $\sigma(D)$.

   Soit t et t' deux transvection d'hyperplans respectifs H et H', et de vecteurs a et b.

   On considère un automorphisme σ qui envoie H sur H' (restriction bijective donc) et a sur b. Ce qu'on vient de faire assure que $t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$.

4. (a) On reconnait la matrice d'une transvection. c'est encore plus clair si on permute la j-ème colonne avec la dernière.
   Son hyperplan est engendré par les e_k avec $k \neq j$, et $D = Vect(e_i)$.

   (b) On reconnait ici une matrice de changement élémentaire : à la i-ème ligne, on rajoute la j-ème.

5. On a fait cet exerciec en TD. Le dernier terme situé sur la dernière ligne et la dernière colonne est le déterminant de M.

6. Si M est dans $SL(E)$, on obtient donc une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 1. On multiplie maintenant à nouveau par les $B_{i,j}$ toujours à droite pour obtenir l'identité. Et comme les opérations élémentaires qui transforment une matrice en l'identité transforment dans le même temps l'identité en l'inverse de cette matrice, on déduit que cette inverse est dans le groupe engendré par les transvections. L'inverse d'une transvection est une transvection, lesquelles sont dans $SL(E)$, donc $SL(E)$ est le groupe engendré par les transvections.

7. σ est dans $Z(SL(E))$ si et seulement si σ commute avec toutes les transvections.

   D'après la question II.3, si $\sigma \in SL(E)$ commutent avec toutes les transvections, cela veut dire, que, quel que soit D droite de E, $\sigma(D) = D$, puisque pour toute droite D, on peut trouver une transvection dont ce soit la droite.

   Si on préfère, cela veut dire que pour tous les vecteurs u de E, u et $\sigma(u)$ sont liés. On sait donc que σ est une homothétie. Le centre de $SL(E)$ est donc composé des homothéties, de rapports λ de module 1 (ce sont les seules homothéties qui sont dans $SL(E)$.

   Si on travaillait dans $\mathbb{R}$, ce serait un groupe cyclique. Ici, ce n'est certainement pas le cas.