Université du Sud Toulon-Var
L3 Mass
Théorie des jeux

Corrigé du partiel du 14 mars 2007.

Exercice 1. On indique les min-max et max-min du jeu en stratégies pures dans le tableau suivant:

						min	$max\,min$
	0	1	7	0	1	0	
	4	2	3	2	3	2	$\underline{v} = 2$
	9	0	0	2	1	0	
	7	-1	4	2	1	-1	
max	9	2	7	2	3		
$min\,max$		$\overline{v} = 2$		$\overline{v} = 2$			

On voit que les valeurs $\underline{v}$ et $\overline{v}$ coïncident et valent 2, donc le jeu admet au moins un équilibre en stratégies pures et la valeur du jeu est 2. De plus, les équilibres en stratégies pures sont (X_2, Y_2) et (X_2, Y_4). L'ensemble des équilibres est alors le convexe

$$[(X_2,Y_2),(X_2,Y_4)] = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 1-t \\ 0 \end{bmatrix} \right) \, : \, t \in [0,1] \right\}.$$

On peut donc proposer comme autre équilibre $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ par exemple.

Exercice 2. On indique les min-max et max-min du jeu en stratégies pures dans le tableau suivant:

					min	$max\,min$
	1	6	0	7	0	
	2	0	3	4	0	
	3	2	3	2	2	$\underline{v} = 2$
max	3	6	3	7		
$min\,max$	$\overline{v} = 3$		$\overline{v} = 3$			

On voit que les valeurs $\underline{v}$ et $\overline{v}$ ne coïncident pas donc le jeu n'admet pas d'équilibre en stratégies pures.

La stratégie Y_2 domine fortement la stratégie Y_4, ce qui permet de se limiter au jeu de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dans ce jeu, la stratégie X_3 domine fortement la stratégie X_2, ce qui permet de se limiter au jeu de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

La stratégie Y_3 domine fortement la stratégie Y_1, ce qui permet de se limiter au jeu de matrice

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ce dernier jeu admet $\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} \right)$ pour seul équilibre.

On en déduit que le seul équilibre du jeu de matrice B est $\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ 0 \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et que sa valeur est $\frac{18}{7}$.

Exercice 3. D'après le cours, un couple $(\overline{x}, \overline{y})$ est un équilibre si et seulement si

$$^t\overline{x}\, C\overline{y} \;=\; \max_{x\in X} {}^t x\, C\overline{y} \;=\; \min_{y\in Y} {}^t\overline{x}\, Cy.$$

Il suffit d'étudier les trois cas proposés:

- *le cas où X joue $\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et Y joue $\overline{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:*

  on vérifie que ${}^t\overline{x}\, C\overline{y} \;=\; 3$ et que $C\overline{y} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc

  $$\max_{x\in X} {}^t x\, C\overline{y} \;=\; 3;$$

  et de même ${}^t\overline{x}\, C \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ donc

  $$\min_{y\in Y} {}^t\overline{x}\, Cy \;=\; 3.$$

  On en déduit que ce couple est un équilibre (et la valeur du jeu est 3).

- *le cas où X joue $\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et Y joue $\overline{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:*

on vérifie que ${}^t\overline{x}\, C\overline{y} \;=\; \frac{7}{2}$ et que $C\overline{y} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$\max_{x \in X} {}^t x\, C\overline{y} \;=\; \frac{9}{2} \;>\; \frac{7}{2}$$

donc ce couple n'est pas un équilibre.

- *le cas où X joue* $\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *et Y joue* $\overline{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$:

  on vérifie que ${}^t\overline{x}\, C\overline{y} \;=\; 3$ et que $C\overline{y} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{9{,}5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{10{,}5}{3} \end{pmatrix}$ donc

$$\max_{x \in X} {}^t x\, C\overline{y} \;=\; \frac{10,5}{3} \;>\; 3$$

  donc ce couple n'est pas un équilibre.

Remarque: pour le deuxième cas, on sait déjà que la valeur du jeu est 3 (grâce au premier cas qui est un équilibre), donc on peut écarter tout de suite ce couple parcequ'il ne donne pas cette valeur. Par contre le troisième couple donne la bonne valeur mais n'est pas un équilibre.