# Sujet : Problèmes inverses spectraux et théorème de Borg-Levinson

### Sujet de mémoire de master II proposé par Yavar Kian

La notion de problème inverse dépend fortement de celle de problème direct. Le problème direct consiste à déduire la réponse du système donné. Pour les problèmes inverses, le cadre est différent au sens où cette fois-ci le système n'est pas entièrement connu. Plus précisément, pour les problèmes inverses, on dispose d'un système avec des paramètres inconnus ainsi que d'informations partielles sur la réponse du système et l'objectif est de déterminer entièrement le système. Ce types de problèmes apparaissent dans différentes applications comme en imagerie médicale, en géologie, en finance... Au delà de ces exemples, on remarque que ces problèmes apparaissent de façon récurrente au quotidien, comme lorsqu'on se demande d'où vient tel son ou d'où vient telle lumière.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier des problèmes inverses spectraux qui constituent une des premières formulations mathématiques des problèmes inverses. Pour cela, on considérera des opérateurs de Schrödinger de la forme

$$A_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

agissant sur $L^2(0,1)$ avec condition aux limites de Dirichlet et avec $q \in L^2(0,1)$ une fonction réelle.

On s'intéressera dans un premier temps à l'étude spectrale de ce type d'opérateurs. Plus précisément, en étudiant certaines propriétés des solutions de problèmes de la forme

$$\begin{cases} -u'' + qu - \lambda u = 0, & \text{sur } (0,1), \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ une constante, on caractérisera les valeurs propres de l'opérateurs $A_q$ et certains vecteurs propres associés. Par la suite, on étudiera à travers les systèmes (0.0.1), certains comportements asymptotiques des valeurs propres et vecteurs propres de $A_q$ et on vérifiera que le spectre de $A_q$ est constitué d'une suite croissante de valeurs propres.

Une fois ces propriétés établies, on s'intéressera au problème dit de Borg-Levinson consistant à déterminer l'opérateur $A_q$ à partir de son spectre. Par ailleurs, en supposant que la fonction $q$ vérifie la condition de parité : pour presque tout $x \in (0,1)$, $q(1-x) = q(x)$, on montrera que le spectre de $A_q$ détermine de façon unique la fonction $q$ et, de ce fait, l'opérateur $A_q$.

Dans ce mémoire, on pourra aussi envisager l'étude de ce types de résultats dans le cadre multidimensionel ou encore pour des opérateurs plus complexes.

## Références


[1] V. A. Ambartsumian, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Phys., **53** (1929), 690-695.

[2] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math., **78** (1946), 1-96.

[3] M. Choulli and P. Stefanov, *Stability for the multi-dimensional Borg-Levinson theorem with partial spectral data*, Commun. Partial Diff. Eqns., **38** (3) (2013), 455-476.

[4] H. Isozaki, *Some remarks on the multi-dimensional Borg-Levinson theorem*, J. Math. Kyoto Univ., **31** (3) (1991), 743-753.

[5] O. Kavian, Y. Kian, E. Soccorsi, *Uniqueness and stability results for an inverse spectral problem in a periodic waveguide*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **104** (2015), no. 6, 1160-1189.

[6] N . Levinson, *The inverse Strum-Liouville problem*, Mat. Tidsskr. B, (1949), 25-30.

[7] A. Nachman, J. Sylvester, G. Uhlmann, *An n-dimensional Borg-Levinson theorem*, Comm. Math. Phys., **115** (4) (1988), 595-605.

[8] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse spectral theory*, Academic Press.