L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 28 juin 2017

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique)**.** Soit P, Q et R trois propositions logiques.

(1) Écrire la négation de la proposition

$$(\, P \text{ et } Q \,) \Rightarrow R$$

(2) Écrire la contraposée de la proposition

$$(\, P \text{ et } Q \,) \Rightarrow R$$

(3) Écrire la négation de la proposition :

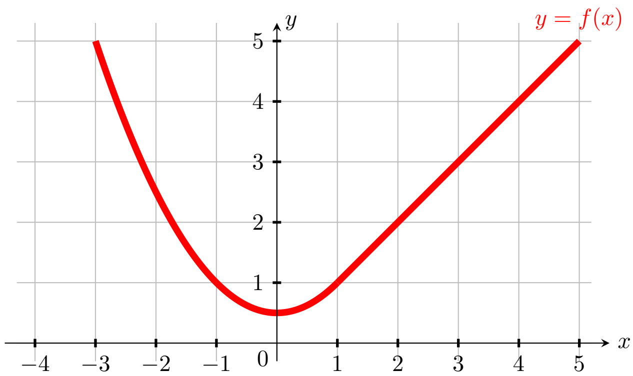
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \qquad g_n < \varepsilon$$

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

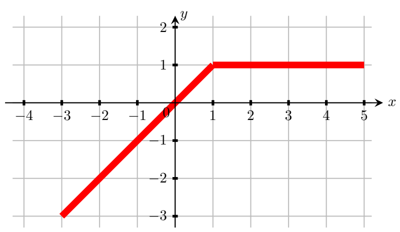
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,

(2) $x \mapsto f(2x) + 1$,

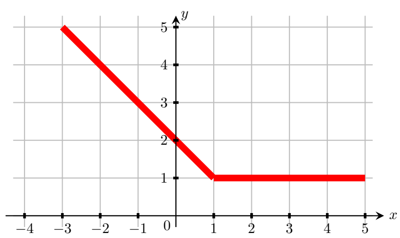
(3) $x \mapsto \frac{1}{2} f(x) - 1$.



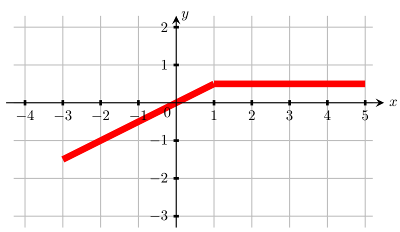
On considère maintenant les trois graphes suivants, lequel correspond au graphe de la dérivée de f ?



(A)



(B)



(C)

Exercice 3 (Suite)**.** On considère la suite récurrente $(p_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ \forall n \geq 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_0.
(2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
(3) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
(4) La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Montrer que f est impaire. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x :

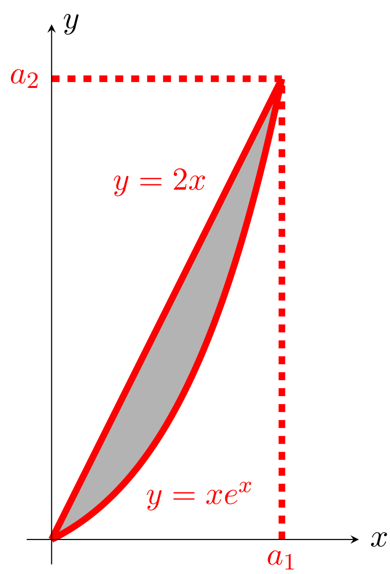
$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 1}.$$

La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$? Si oui, écrire son équation. Dans ce cas, préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote (au-dessus ou au-dessous).
(4) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Calcul intégral)**.** On considère la région plane P définie par:

$$P = \{(x, y) \,|\, x \geq 0, xe^x \leq y \leq 2x\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = 2x$ avec la courbe d'équation $y = xe^x$.
(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} 2x\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} xe^x\mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.