L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen ratrappage Juin 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.** Soit P, Q et R trois propositions logiques.

(1) Écrire la négation de la proposition

$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

(2) Écrire la contraposée de la proposition

$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

(3) Écrire la négation de la proposition :

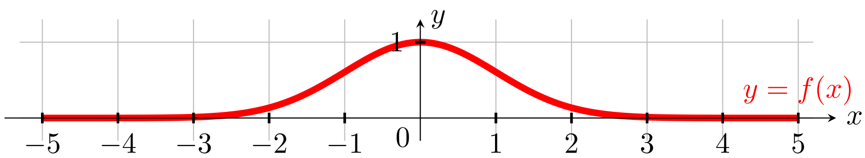
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \qquad g_n < \varepsilon$$

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

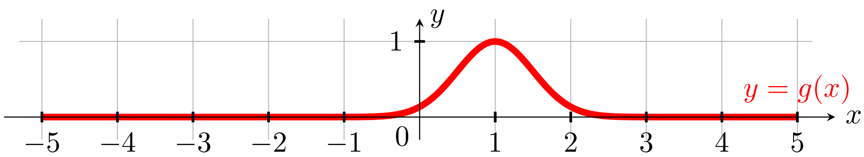
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,

(2) $x \mapsto f(x-1) - 1$,

(3) $x \mapsto 2f(x) + 1$.



On considère maintenant le graphe de la fonction $g(x) = f(ax+b) + c$ représenté ci-dessous. Déterminer les réels a, b, c.



Exercice 3 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{x/2}}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \frac{1}{2}\dfrac{e^{x/2}(e^{x/2}-1)}{(1+e^{x/2})^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$. En déduire pour quelle valeur de x cette tangente croise l'axe des abscisses.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(7) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $x = 0$.

Exercice 4 (Suite)**.**

On considère une suite géométrique $(z_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les trois termes z_0, z_1 et z_3 vérifient:

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 + \frac{1}{4}z_1 - z_3 & = & 8 \\ \frac{1}{4}z_0 - z_1 + 2z_3 & = & 0 \\ z_0 + z_1 + 2z_3 & = & 14 \end{array}\right.$$

(1) Calculer les trois réels z_0, z_1 et z_3.
(2) En notant q la raison de la suite géométrique $(z_n)_{n\geq 0}$, donner la relation entre z_3 et z_0.
(3) Quelle est la raison de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$?
(4) Pour $n \geq 0$ calculer $u_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

On considère les équations différentielles

$$(A) \qquad\qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$(B) \qquad\qquad u'(x) + u(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ecrire toutes les solutions de l'équation (A).
(2) Déterminer une primitive de xe^{2x}.
(3) Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation (B).
(4) Résoudre le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} u'(x) + u(x) = xe^x, & \qquad x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 & \end{array}\right.$$