

Calculatrices et tous documents interdits.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Logique (2 points)). On considère la proposition :

Si tous les insectes ont six pattes alors les araignées ne sont pas des insectes.

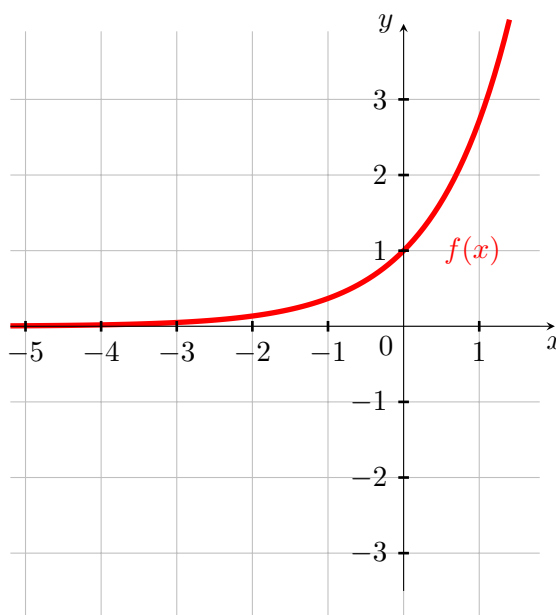
- (1) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.
- (2) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.

Exercice 2 (Tracés de courbes (3 points)). On considère la fonction gaussienne suivante :

$$f: x \mapsto f(x) = e^x.$$

Tracer à main levée, dans le repère ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

- (1) $x \mapsto -f(x)$,
- (2) $x \mapsto f(x) - 1$,
- (3) $x \mapsto f(x - 2) - 3$,
- (4) $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

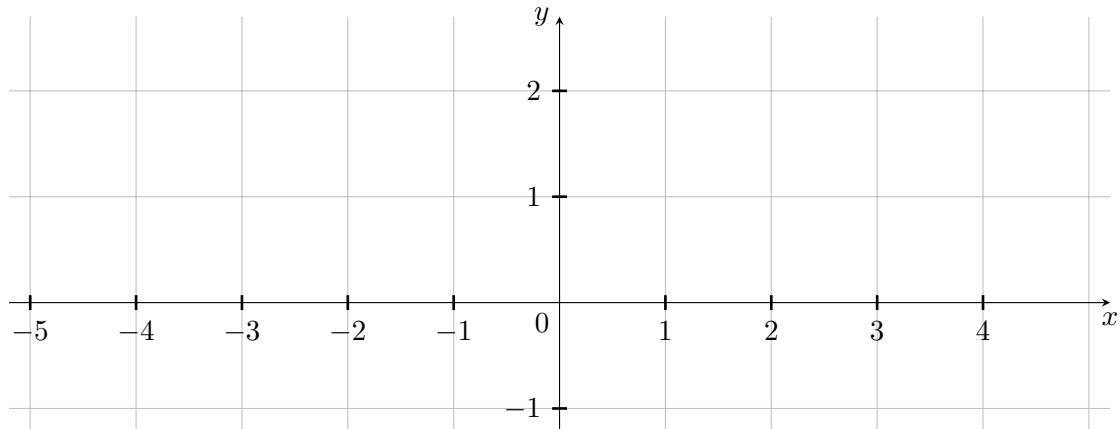


Exercice 3 (Étude d'une fonction (8 points)). Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^x}$$

- (1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
- (2) Calculer la dérivée f' de f . Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \frac{2e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.
- (3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition ? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.
- (4) Étudier le signe de la dérivée f' , et donner le tableau de variations de f . Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
- (5) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.
- (6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? Justifier la réponse.
- (7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses.

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $x = 0$.



Exercice 4 (Équation différentielle ordinaire (3 points)).

- (1) Quelles sont les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'(x) = 2y(x)$?
- (2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.
- (3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2y(x) + xe^x$?

On traitera au choix l'un des deux exercices suivants

Exercice 5 (Au choix 1 : Nombres complexes (4 points)). Racines carrées et forme trigonométrique d'un nombre complexe :

- (1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 = 1 + i$$

- (2) Donner le module de z^2 et l'argument principal (dans $[0, 2\pi)$) de z^2 .
- (3) Ecrire chacune de des deux solutions de l'équation sous la forme trigonométrique.
- (4) Déduire de (1) et (2) la valeur de $\cos(\pi/8)$.

Exercice 6 (Au choix 2 : Étude de suite (4 points)). Soit a et b deux nombres réels, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

- (1) Rappeler la définition d'une suite arithmétique.
- (2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n - \frac{2b}{3}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , dont on précisera la valeur.
- (3) En déduire l'expression $u_n = (a - \frac{2b}{3})q^n + \frac{2b}{3}$ pour tout n .
- (4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin d'avoir à la fois $u_1 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$?