L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 10 janvier 2018

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits. Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.**

Soit P, Q et R trois propositions.

(1) Écrire la négation de la proposition $(\, P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$

(2) Écrire la contraposée de la proposition $(\, P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$

(3) Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$. Écrire la négation "non$S$" de la proposition quantifiée S:

$$S : \qquad \forall \epsilon > 0,\ \ \exists k \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq k, \qquad g_n < \epsilon$$

(4) La proposition S est-elle vraie pour la suite $g_n = \frac{1}{n}$? Justifier succinctement votre réponse.

(5) La proposition "non$S$" est-elle vraie pour $g_n = 1 + \frac{1}{n}$? Justifier succinctement votre réponse.

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.**

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Pour les tracés des questions (2) à (4), vous pouvez soit les reporter sur votre copie soit les faire directement sur cet énoncé (à joindre dans ce cas à votre copie).

(1) Donner l'équation de f sur l'intervalle $]0, 2[$.

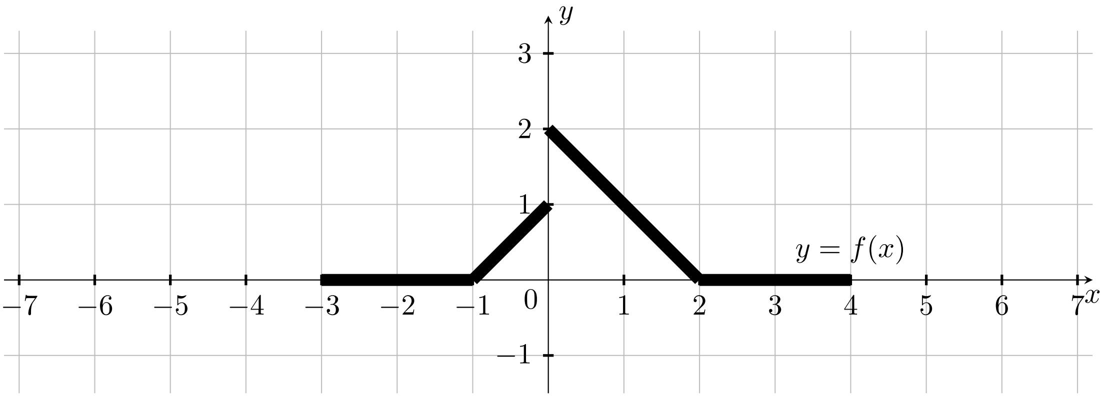
(2) Tracer le graphe de la fonction g où $g(x) = f(x + 3)$.

(3) Tracer le graphe de la fonction h où $h(x) = 2f(x) - 1$

(4) Tracer le graphe de la fonction k où $k(x) = f(-2x)$

(5) Calculer la dérivée f' de f et trouver son domaine de définition.

(6) Tracer le graphe de la fonction dérivée f' sur un autre repère.



Exercice 3 (Suite)**.**

Soit a, $b \neq 0$ et c trois nombres réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = cu_n - \frac{b}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n + b$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et trouver la valeur de c telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Pour les questions suivantes, c prend cette valeur.

(3) En déduire l'expression $u_n = (a+b)\left(\frac{1}{2}\right)^n - b$ pour tout n.

(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin que $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$?

(5) Dans le dernier cas, calculer $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ puis $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.**

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 + 2)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.

(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote ou une direction asymptotique en $+\infty$?

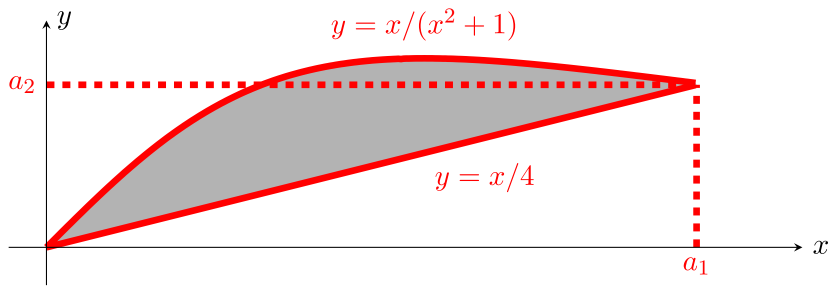
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1. On prendra comme approximation $\ln(2) \simeq 0,7$.

(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Calcul intégral)**.** On considère la région plane P définie par:

$$P = \left\{(x,y) \,:\, x \geq 0,\ \frac{x}{4} \leq y \leq \frac{x}{x^2+1}\right\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ avec la courbe d'équation $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ tel que $a_1 \geq 0$.

(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} \frac{x}{4}\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.