L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 4 janvier 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée.
Autres documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique)**.** On étudie la proposition suivante :

P : "*Si il fait sombre ou il fait nuit, alors tous les chats sont gris.*"

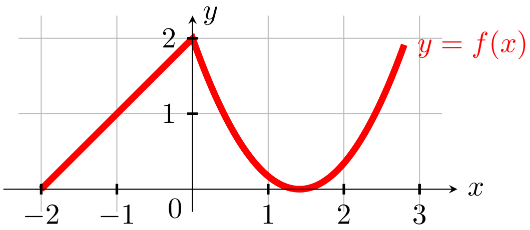
(1) Écrire la négation de cette proposition P.
(2) Écrire la contraposée de cette proposition P.
(3) On considère aussi la proposition

Q : "*Il ne fait pas nuit ou on voit bien la lune.*"

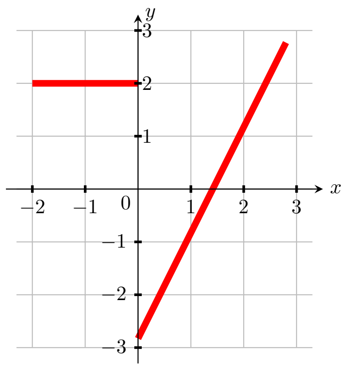
On suppose que les propositions P et Q sont vraies et que l'on voit un chat vert. Voit-on bien la lune ? Justifier.

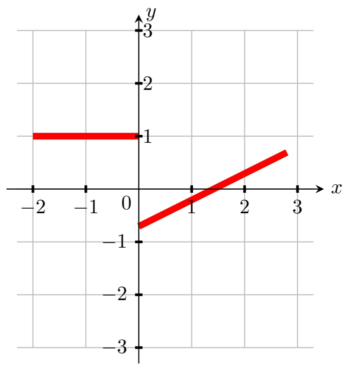
Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto f(x+1)+3$,
(2) $x \mapsto -f(-x)$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)-3$.



L'un des deux graphes ci-dessous correspond-il au graphe de la dérivée de f ?


(A)


(B)

réponses possibles (justifier son choix) :

- *(A),*
- *(B),*
- *"aucun des deux".*

Exercice 3 (Suite)**.** On considère la suite récurrente $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_2 = 0, \\ \forall n \geq 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}(2-p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_1 et p_0.
(2) La suite (p_n) est-elle une suite arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre ?

(3) Pour tout $n \geq 0$ on pose $q_n = p_n - \frac{2}{3}$. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.
(4) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
(5) Pour $n \geq 0$ calculer $u_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n$, puis $\lim_{n\to\infty} q_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

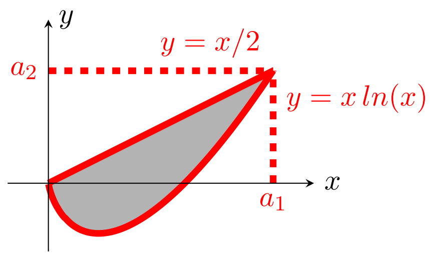
$$f(x) = x^2 + \ln(e^x + 1)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
(2) Calculer la dérivée f' de f et la dérivée seconde f'' de f.
En remarquant que f'' est aussi la dérivée de f', démontrer que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'annule en exactement un point x_0 : on ne demande pas de calculer ce point, pour la suite on prendra $x_0 \simeq -0,4$.
(3) Donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(4) Déterminer, s'il y en a, les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$.
(6) Tracer la courbe représentative de f. On prendra $f(x_0) \simeq 0,6$, $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.

Exercice 5 (Calcul intégral)**.** On considère la région plane P définie par:

$$P = \left\{(x,y) \;:\; x \geq 0,\; x\,\ln(x) \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



Dans cet exercice, on prolonge la fonction $x \mapsto x\,\ln(x)$ par continuité en 0 en admettant que $0\ln(0) = 0$.

(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ avec la courbe d'équation $y = x\,ln(x)$.
(2) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^{a_1} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{a_1} x\,\ln(x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra intégrer par parties pour cette dernière intégrale).
(3) Calculer la surface de la région P.