L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 8 janvier 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique)**.** En mathématiques, le principe des tiroirs peut être énoncé ainsi :

> *Si le nombre de tiroirs de rangement est strictement inférieur au nombre de chaussettes et si on range toutes les chaussettes dans les tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.*

(1) Soit P, Q et R trois propositions logiques. Écrire la négation de la proposition

$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

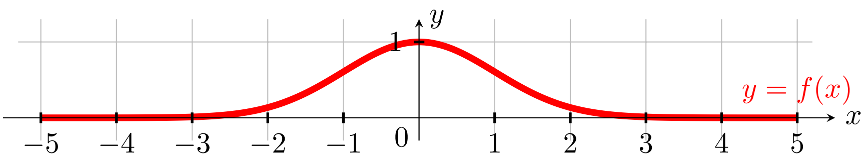
(2) Écrire la négation de la proposition :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq 2$$

(3) Écrire la négation du principe des tiroirs.
(4) Écrire la contraposée du principe des tiroirs.

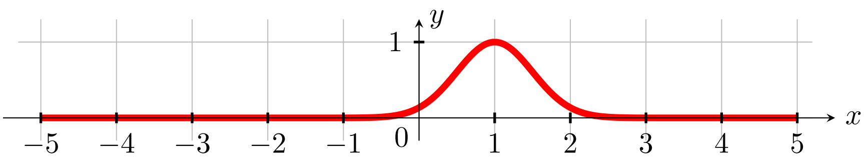
Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto -f(x) - 1$,
(2) $x \mapsto f(x-3) - 1$,
(3) $x \mapsto 2f(x) - 1$.



On considère maintenant le graphe suivant, indiquer à quelle transformation du graphe de f il correspond parmi les 4 propositions suivantes :

(a) $x \mapsto f(2(x+1))$,
(b) $x \mapsto f(2(x-1))$,
(c) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x+1))$,
(d) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x-1))$.



Exercice 3 (Suite)**.** Un joueur joue au casino de la manière suivante : il mise toujours tout son argent sur le rouge; si le rouge sort, alors il gagne le double de sa mise, sinon il perd sa mise et mise le double de sa dernière mise sur le rouge. Par exemple au tour numéro 1 il mise 1 euro, si le rouge sort il gagne 2 euros et s'il perd il mise 2 euros au tour numéro 2, et s'il perd à nouveau il mise 4 euros au tour numéro 3...
On note u_n la somme que le joueur mise au tour numéro n (en particulier $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$).

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.
(2) Pour $n \geq 1$, écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

(3) On suppose que le joueur perd à chaque tour. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique, et en déduire une formule pour u_n en fonction de n.
(4) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?
(5) On suppose que le joueur perd ses neuf premières mises (du tour 1 au tour 9) : combien a-t-il perdu en tout ? On rappelle que $2^{10} = 1024$.
(6) On suppose maintenant qu'au tour 10 le joueur gagne enfin après avoir perdu aux 9 premiers tours. Le casino lui donne alors deux fois sa mise u_{10}. Combien le joueur a-t-il gagné (ou perdu) sur toute cette partie, en comptant les 9 tours perdants et le dixième tour gagnant ?

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{2x}\right) - x$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(2) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}}$. Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f. Indiquer si la fonction f a un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion. Déterminer le(s) intervalle(s) sur lesquels f est convexe ou concave.
(4) Déterminer si la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$. Démontrer que la courbe représentative de f admet la droite $y = x$ comme asymptote en $+\infty$ (on pourra utiliser l'égalité $2x = \ln(e^{2x})$.
(5) Soit a un nombre réel, rappeler l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$. On pourra utiliser les valeurs $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(5) \simeq 1,6$.
(6) Tracer la courbe représentative de f, ainsi que la tangente de la question (5).

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre fixe. Ecrire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = -ay(x).$$

(2) Résoudre le problème de Cauchy

$$y_a'(x) = -ay_a(x), \quad y_a(0) = 1$$

c'est-à-dire trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = -ay(x)$ qui vaut 1 en 0.

(3) On considère la solution trouvée dans la question (2). Déterminer le paramètre a en sachant que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 1/2$.
Existe-t-il un paramètre a tel que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 2$? Justifier les réponses.
(4) Trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation non homogène

$$y'(x) = -y(x) + x$$

puis écrire toutes ses solutions.

Exercice 6 (Bonus: Nombres complexes)**.**

(1) Trouver la forme algébrique de toutes les racines complexes de l'équation

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.

(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.