L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 9 janvier 2014

Documents manuscrits et distribués en cours autorisés.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

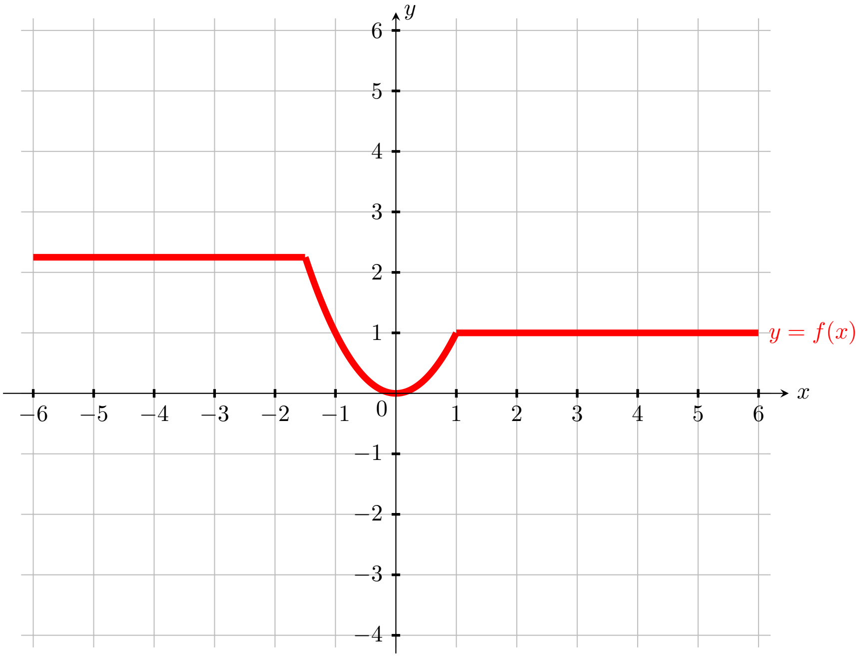
Exercice 1 (Logique)**.** On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression.

(1) Ecrire la négation du principe ci-dessus.
(2) Ecrire la contraposée du principe ci-dessus.
(3) On étudie un gaz qui a la propriété suivante : quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue. Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non?

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(1) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(2) $x \mapsto f(x-1)+1$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - 1$,
(4) $x \mapsto f(-2x) - 4$.



Exercice 3 (Suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le premier terme est $u_0 = 1$ et vérifiant

$$u_{n+1} \;=\; 2u_n - \frac{1}{2}u_n^2$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(1) En utilisant le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \leq 0$$

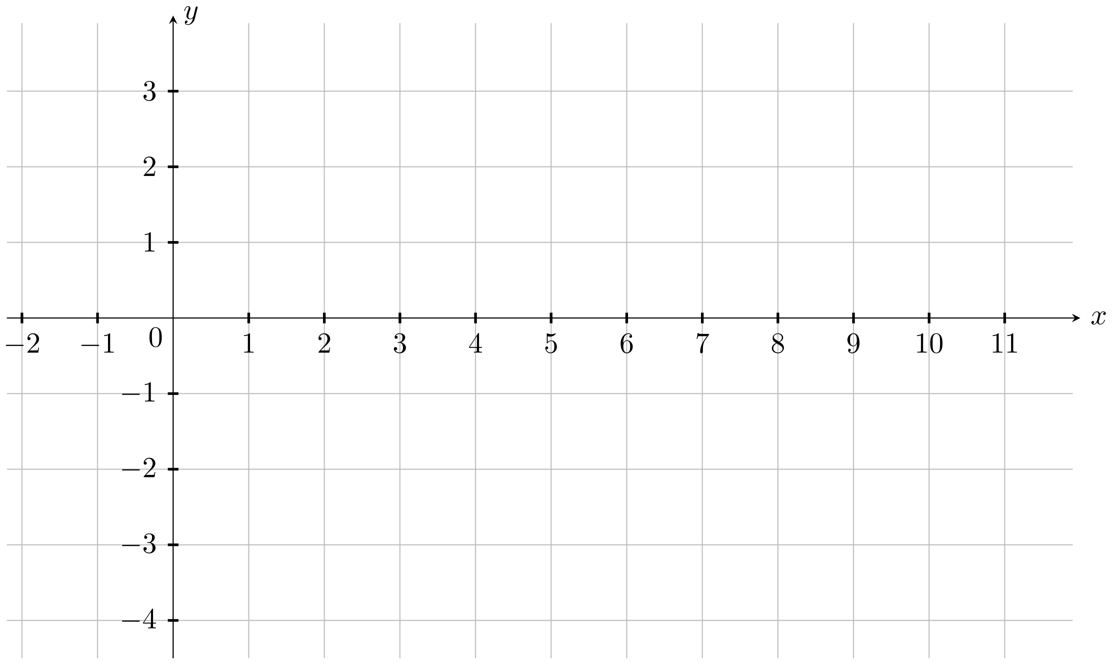
montrer par récurrence que $u_n \in [0,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) En supposant que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, quelles valeurs peut-elle prendre ?
(3) En étudiant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et calculer sa limite.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2(\ln(x+1)+1)}{x+1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? Si oui, écrire son équation.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $e^{1/2}-1$. On prendra comme approximation $e^{1/2} \simeq 1,7$, ainsi que $e \simeq 3$ et $f(e^{1/2}-1) \simeq 1,8$.
(6) Tracer la courbe représentative de f.



Exercice 5 (Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x)$?
(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$.
(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x) + x$?

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation
$$z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0.$$
(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.