Licence Sciences et Techniques

L1 SV

UNIVERSITÉ DE TOULON

M11

Mathématiques

Recueil d'exercices.

La correction est disponible sur ma page web:

`http://faccanoni.univ-tln.fr/polys.html`

Gloria Faccanoni

ℹ `http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html`

Année 2016 – 2017

Dernière mise-à-jour : Mercredi 21 septembre 2016

Table des matières

Notations

Ensembles usuels en mathématiques

On désigne généralement les ensemble les plus usuels par une lettre à double barre :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls)

$\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers non nuls

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\left(\frac{p}{q}\ \text{tel que}\quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right)$

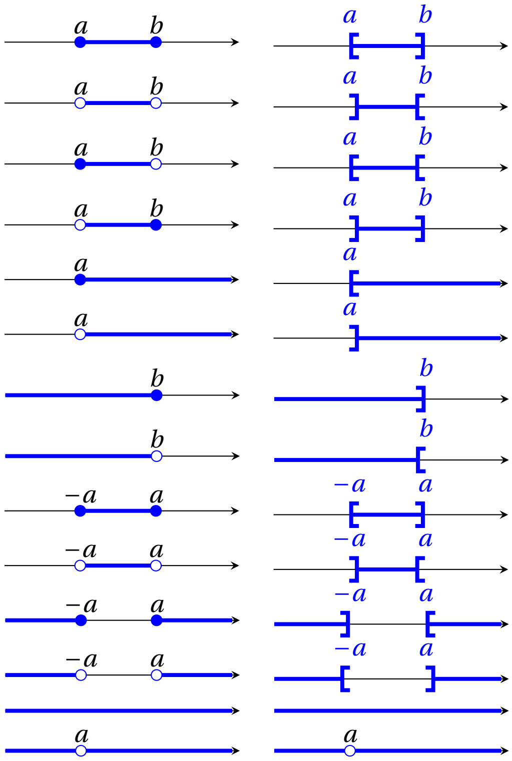
$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels autres que 0

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes

Intervalles

Inégalité(s)	Ensemble	Représentations graphique
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	$]a, b[$	
$a \leq x < b$	$[a, b[$	
$a < x \leq b$	$]a, b]$	
$x \geq a$	$[a, +\infty[$	
$x > a$	$]a, +\infty[$	
$x \leq b$	$]-\infty, b]$	
$x < b$	$]-\infty, b[$	
$\lvert x\rvert \leq a$ avec $a \geq 0$	$[-a, a]$	
$\lvert x\rvert < a$ avec $a \geq 0$	$]-a, a[$	
$\lvert x\rvert \geq a$ avec $a \geq 0$	$]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$	
$\lvert x\rvert > a$ avec $a \geq 0$	$]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$	
$\forall x \in \mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$	
$x \neq a$	$]-\infty, a[\cup]a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{a\}$	



Symboles utilisés dans le document

définition, théorème, corollaire, proposition, propriété(s)

astuce

attention

remarque

méthode, algorithme, cas particulier

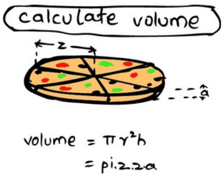
exercice de base

exercice

exemple

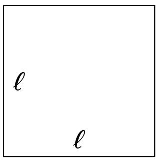
curiosité

$>$	strictement supérieur
$<$	strictement inférieur
$\geq$	supérieur ou égal
$\leq$	inférieur ou égal
$\neq$	différent
$\equiv$	équivaut (équivalence logique)
$\{\quad\}$	ensemble
$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	ensemble $\mathbb{A}$ privé de l'ensemble $\mathbb{B}$, *i.e.* $C_{\mathbb{A}}(\mathbb{B})$ le complémentaire de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{A}$
$\emptyset$	ensemble vide
$\vert$	tel que
$\in$	appartient
$\notin$	n'appartient pas
$\forall$	pour tout (quantificateur universel)
$\exists$	il existe (quantificateur universel)
$\nexists$	il n'existe pas
$\exists!$	il existe un et un seul
$\subset$	est sous-ensemble (est contenu)
$\cup$	union d'ensembles
$\cap$	intersection d'ensembles
$\vee$	ou
$\wedge$	et
$\neg$	non
$\Longrightarrow$	si … alors ; implique
$\Longleftrightarrow$	si et seulement si
ssi	si et seulement si
$\ln$	logarithme de base e
$\log_a$	logarithme de base a
∞	infini
$\int$	symbole d'intégrale
$\sum_{i=0}^{n} a_i$	somme par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=0}^{n} a_i$	produit par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$
$n!$	n factoriel, équivaut à $1 \times 2 \times \cdots \times n$
$g \circ f$	composé de f par g (on dit «g rond f» ou encore «f puis g»)
f', $\frac{df}{dx}$	symboles de dérivée
$\overset{(H)}{=}$	utilisation de la règle de l'Hôpital
$\overset{(P.P.)}{=}$	intégration par parties



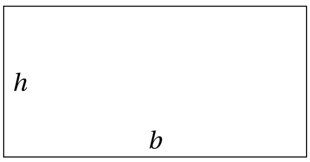
1
Formulaires de géométrie

1.1 Formulaire de géométrie plane



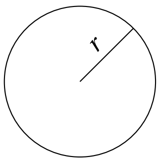
Périmètre $p = 4\ell$

Aire $A = \ell^2$



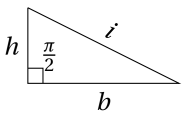
Périmètre $p = 2(b+h)$

Aire $A = bh$



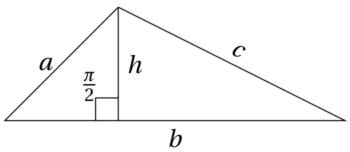
Périmètre $p = 2\pi r$

Aire $A = \pi r^2$



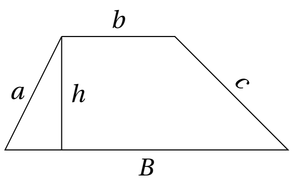
Périmètre $p = b + h + i$

Aire $A = \frac{bh}{2}$



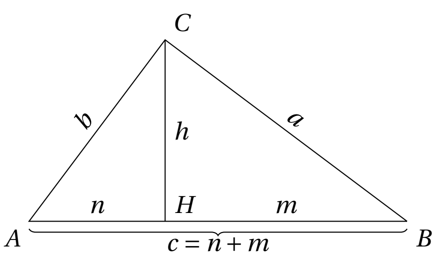
Périmètre $p = a + b + c$

Aire $A = \frac{bh}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$



Périmètre $p = a + B + c + b$

Aire $A = \frac{(B+b)h}{2}$



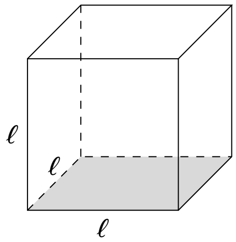
Triangle rectangle en C : $\widehat{ACB} = \pi/2$

Théorème de Pitagore $\left[\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2, \\ b^2 = h^2 + n^2, \\ a^2 = h^2 + m^2 \end{array}\right.$

Premier théorème d'Euclide $\left[\begin{array}{l} b^2 = cn \\ a^2 = cm \end{array}\right.$

Deuxième théorème d'Euclide $h^2 = nm$

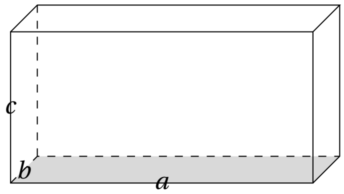
1.2 Formulaire de géométrie solide



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 4\ell^2$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 6\ell^2$

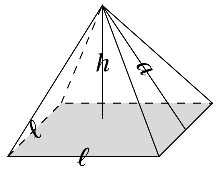
Volume $V = \ell^3$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2c(a+b)$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2(ab+ac+bc)$

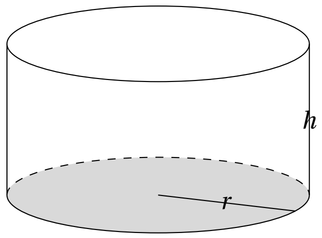
Volume $V = abc$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\ell a$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2\ell a + \ell^2$

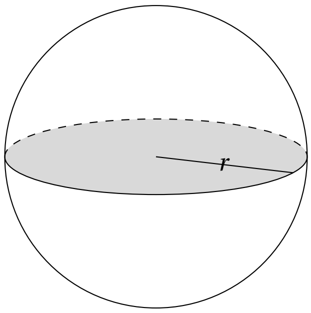
Volume $V = \frac{\ell^2 h}{3}$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h$

Surface totale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Volume $V = \pi r^2 h$



Surface totale $S_{\text{tot}} = 4\pi r^2$

Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Exercices

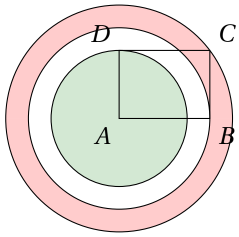
Exercice 1.1
La scène d'une salle de concert a la forme d'un demi-cercle. Sa longueur est de 16 m. Quelle est sa surface, en m^2 ?

Exercice 1.2
La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Exercice 1.3
1. Dans un triangle ABC, rectangle en A, soit $\overline{AB} = 8$ et $\overline{AC} = 6$. Quel est son périmètre ? Et son aire ?
2. L'aire d'un carré égale a. Quelle est la longueur de sa diagonale ?
3. Une pyramide à base carrée a une hauteur de 9 cm. Si le volume de la pyramide égale 768 cm^3, quelle est la longueur du côté de sa base ?

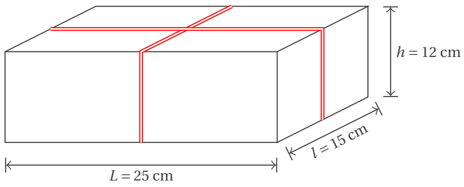
Exercice 1.4

Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



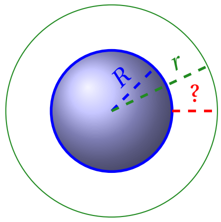
Exercice 1.5

On veut faire un paquet cadeau (voir dessin). On donne $L = 25\,\text{cm}$, $l = 15\,\text{cm}$, $h = 12\,\text{cm}$. Calculer la longueur de la ficelle nécessaire sans les nœuds.



Exercice 1.6

Imaginons que l'on entoure la Terre, au niveau de l'équateur, avec une ficelle, puis que l'on allonge cette longueur de ficelle d'un mètre. Quel sera l'espace libre ainsi créé entre la Terre et la ficelle ? Même question pour une balle de tennis.



2 Méthodologie disciplinaire

2.1 Pourcentages

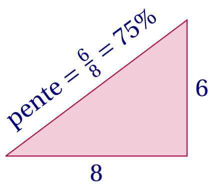
2.1 Définition (Pourcentage)
Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

EXEMPLE
- ⋆ $1\% = 1/100 = 0.01$
- ⋆ 20% de $3\,\text{kg}$ correspond à $0.2 \times 3\,\text{kg} = 0.6\,\text{kg}$

2.2 Définition (Pente)
Sur les panneaux de signalisation routière ou sur les pistes de skis, l'inclinaison des pentes est généralement exprimée sous la forme d'un pourcentage plutôt que celle d'un angle. On aurait tort de croire que cette valeur correspond directement à une valeur d'angle. En réalité, la pente est définie comme une distance verticale (un dénivelé) divisée par la distance horizontale correspondante :

$$\text{Pente (en \%)} = \frac{\text{Distance parcourue verticalement}}{\text{Distance parcourue horizontalement}}$$

Dans le cas d'une pente à 100%, chaque mètre parcouru horizontalement correspond à une montée d'un mètre verticalement. L'angle entre la route et l'horizontale est alors de 45°, et non davantage comme on le croit parfois.



On verra plus tard, lorsqu'on aura abordé les fonctions trigonométriques, que le passage entre un angle α et la pente correspondante p se fait grâce à la fonction tangente : $\tan(\alpha) = p$. Ainsi, si $\alpha < 45°$ alors $p < 100\%$ tandis que si $\alpha > 45°$ alors $p > 100\%$. Réciproquement, on peut obtenir la pente à partir de l'angle correspondant grâce à la fonction inverse, l'arc-tangente : $\arctan(p) = \alpha$. Il est clair alors que $\lim_{\alpha \to 90°} p = +\infty$.

2.3 Définition (Taux)
Le taux d'augmentation (ou de diminution) est le rapport de la partie augmentée (ou diminuée) à la valeur initiale. Il est exprimé en pourcentage.

EXEMPLE
Lorsqu'on augmente une quantité a de 20% on obtient la quantité $a + 0.2 \times a = (1 + 0.2)a = 1.2a$.

EXEMPLE

1. Dans un zoo, il y a 2 000 animaux. Parmi eux, 1 200 sont des mammifères. Quel est le pourcentage de mammifères dans le zoo ?

   Réponse : $\frac{1200}{2000} \times 100\% = 0.6 \times 100\% = 60\%$.
2. Dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux les reptiles constituent 5%. Combien y a-t-il de reptiles ?

   Réponse : $2000 \times 5\% = 2000 \times \frac{5}{100} = 100$. On peut également imaginer ce problème en tant que proportionnalité : si 2 000 animaux correspondent à 100%, combien d'animaux correspondent à 5% ? Ainsi on crée une proportion : $\frac{2000}{100} = \frac{5}{x}$ d'où $x = 100$.
3. Toujours dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux, 25% sont des oiseaux. 3% des oiseaux sont des aigles. Combien y a-t-il d'aigles dans le zoo ?

   Réponse : $2000 \times 25\% \times 3\% = 2000 \times \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = 15$.
4. Une année s'est écoulée dans le zoo, et le nombre d'animaux est devenu 2 030. Quel est le taux de croissance du nombre d'animaux ?

   Réponse : $\frac{2030-2000}{2000} \times 100\% = \frac{30}{2000} \times 100\% = 1.5\%$.
5. Le nombre de reptiles dans le zoo, comme on l'a vu, est de 100. Après un an, leur nombre a augmenté de 15%, mais l'année suivante il a diminué de 11%. Quel est le nombre de reptiles à la fin de la deuxième année ?

   Réponse : Le réflexe presque naturel serait d'ajouter 15%, en déduire 11% et ainsi obtenir 104 reptiles, mais c'est faux. Souvenez-vous bien de la définition d'un taux. La solution correcte se présente de cette façon :
   - ⋆ 1ère année : $100 \times (1 + 15\%) = 100 \times \frac{115}{100} = 115$,
   - ⋆ 2ème année : $115 \times (1 - 11\%) = 115 \times \frac{89}{100} = 102$.

   La réponse est 102.

EXEMPLE

Un prix subit trois augmentations annuelles successives : 10%, 50% *et* 90%.

- ⋆ *Quel est le pourcentage d'augmentation global durant ces trois ans ?*

  Réponse : le prix est multiplié par $1.1 \times 1.5 \times 1.9 = 3.135$. Cela correspond à une augmentation global de 213.5%.
- ⋆ *Quel est le pourcentage d'augmentation annuel moyen ?*

  Réponse : on cherche q tel que $q^3 = 3.135$; on obtient $q = \sqrt[3]{3.135} \simeq 1.464$. Donc l'augmentation annuelle moyenne est environ 46.4%. On remarque que si on avait pris la moyenne arithmétique de 10%, 50% et 90%, on aurait obtenu un résultat trop grand, à savoir 50%.

EXEMPLE

On vous propose de diminuer votre salaire de 50% *et ensuite de l'augmenter de* 80%. *Seriez-vous d'accord ?*

Réponse : Le salaire est multiplié par $(1 - 0.5) \times (1 + 0.8) = 0.9$. Cela correspond à une diminution global de 10%.

Astuce (Pourcentages)

- ⋆ Pour appliquer un taux de pourcentage $p\%$ à un nombre x on le multiplie par $\frac{p}{100}$.
- ⋆ Le taux de pourcentage de x par rapport à y est égale à $\frac{x}{y} \times 100$.
- ⋆ Pour augmenter un nombre x de $p\%$, on le multiplie par $1 + \frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour diminuer un nombre x de $p\%$, on le multiplie par $1 - \frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour une augmentation de $p\%$, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1 + \frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour une diminution de $p\%$, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1 - \frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour composer (enchaîner) les pourcentages, il ne faut pas les ajouter.

2.2 Proportionnalité et règle de trois

La règle de trois est une recette utilisée pour calculer dans des situations de proportionnalité. Son symbole, une croix, n'est pas très intuitif pour décrire une situation que les mathématiciens qualifient de linéaire et qu'ils représentent par une droite. C'est une notion subtile qui se rapproche de celle de fraction.
Une situation est proportionnelle lorsque des parts égales contribuent au tout de la même façon.

EXEMPLE

Supposons que pour faire des crêpes pour 8 personnes, il faille 250 g de farine, 4 œufs, un demi-litre de lait et 50 g de beurre. En divisant en deux parts égales tous les ingrédients, on pourra faire des crêpes pour 4 personnes. Si l'on n'était que 2, on pourrait à nouveau diviser ces quantités en 2, c'est-à-dire : 62.5 g de farine, 1 œuf, 125 mL de lait et 12.5 g de beurre. Si nous faisons 4 tas comportant chacun cette liste d'ingrédients, nous pouvons faire, avec chacun d'eux, des crêpes pour 2 personnes. Avec deux tas, nous retrouvons nos quantités pour 4 personnes et avec 4 tas, nos quantités pour 8 personnes. Et ainsi, si nous étions 6 personnes, il suffirait de prendre 3 de ces tas.
Comme l'œuf n'est pas divisible en deux parties, avec cette idée, on peut trouver la quantité d'ingrédients pour faire des crêpes pour un nombre pair de convives en prenant autant de tas qu'il y a de couples de convives. Si nous étions un nombre impair, il faudrait soit en prévoir un peu moins, soit un peu plus que la quantité prévue par la recette.
Cette situation peut se résumer par un tableau de proportionnalité

Nombre de convives	2	4	6	8
Farine	62.5 g	125 g	187.5 g	250 g
Œufs	1	2	3	4
Lait	0.125 L	0.25 L	0.375 L	0.5 L
Beurre	12.5 g	25 g	37.5 g	50 g

2.4 Définition (Grandeurs proportionnelles)

On peut dire que deux grandeurs x et y sont proportionnelles s'il existe un nombre m tel que $y = mx$ (le nombre m est le coefficient de proportionnalité).

Remarque

Une proportion représente une égalité de deux fractions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

La qualité notable de la proportion est le fait que les produits des membres «en croix» sont égaux entre eux. Pour la proportion ci-dessus

$$ad = bc.$$

Ceci signifie également qu'on peut échanger les places des membres «en croix» de la proportion, sans que l'égalité perde son sens :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

EXEMPLE

Johann gagne de l'argent en été en tondant les gazons de ses voisins. Il est payé pour ses services par mètre carré de gazon tondu. S'il a tondu les $25\,\mathrm{m}^2$ du gazon de Mme DUPONT pour 10 €, combien Mme DUBOIS devra-t-elle payer pour les services de Johann si son gazon mesure $35\,\mathrm{m}^2$?

Réponse : notons x le prix que devra payer Mme DUBOIS. On a alors la proportion $\frac{25\,\mathrm{m}^2}{10\,€} = \frac{35\,\mathrm{m}^2}{x\,€}$ ce qui donne $x\,€ = 35\,\mathrm{m}^2 \times \frac{10\,€}{25\,\mathrm{m}^2} = 14\,€$.

EXEMPLE (PARTAGES PROPORTIONNELS)

Partager une somme de 2400 € en deux parties x et y proportionnelles à 7 et 5, ceci signifie que $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ avec $x + y = 2400$:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5}, \\ x + y = 2400, \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{7} = 480 - \frac{x}{5}, \\ y = 2400 - x, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1400, \\ y = 1000. \end{cases}$$

Échelle La proportionnalité est également utilisée dans la notion de l'échelle. L'échelle d'une carte ou d'un plan est notée normalement en format «1 ÷ a», où a indique le taux de réduction du plan par rapport au terrain réel :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{longueur réelle}}$$

Exemple

Une carte est dessinée à l'échelle $1 \div 250000$ signifie que chaque kilomètre sur le terrain a été réduit 250000 fois pour être représenté sur la carte : soit 1 km du terrain correspond à 4 mm sur la carte. Soit, inversement, chaque unité sur la carte représente 250000 unités sur le terrain : par exemple, 1 cm sur la carte représente 250 000 cm sur le terrain soit 2.5 km.

Exemple

Sur un plan dessiné à l'échelle $1 \div 1500$, la distance entre deux arbres est 16 cm. Quelle est la distance entre ces arbres en réalité ?
Réponse : on crée une proportion : $\frac{1}{1500} = \frac{16\,\text{cm}}{x\text{cm}}$ d'où $x = 240\,\text{m}$.

Attention

Toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Exemple

Il existe en fait toute sorte de variation d'une quantité en fonction d'une autre et la situation de proportionnalité est la plus simple, aussi essaye-t-on toujours, quand c'est possible, de s'y ramener.

- ⋆ La distance de freinage ne se relie pas simplement au temps de réaction du conducteur. Si il ou elle met deux fois plus de temps à réagir, la voiture parcourra très certainement bien plus que deux fois plus de distance avant de s'arrêter.
- ⋆ Le temps mis par un athlète n'est pas non plus proportionnel à la distance qu'il parcourt. Le record du monde du 400 m est supérieur à deux fois le record du monde du 200 m. Au cours d'un 10 000 m les premiers tours sont parcourus à des vitesses différentes des derniers tours.
- ⋆ Le coût d'une course en taxi comporte une prise en charge à laquelle s'ajoute une somme proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus.
- ⋆ Certains phénomènes sont quadratiques. Le poids d'un disque (homogène) de métal n'est pas proportionnel à son rayon, mais au carré de son rayon.

2.3 Géométrie analytique

2.5 Définition (Droite)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés. Les points (x, y) du plan qui vérifient l'équation

$$ax + by + c = 0$$

appartiennent à une droite. Si $b \neq 0$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$y = mx + q$$

avec $m = -\frac{a}{b}$ la pente de la droite et $q = -\frac{c}{b}$ l'interception de la droite avec l'axe des ordonnées.

2.6 Propriété

Soient m_1 et m_2 la pente de r_1 et r_2 deux droites, alors

- ⋆ $r_1 \parallel r_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$,
- ⋆ $r_1 \perp r_2$ si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$.

Intersection de deux droites Si deux droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ne sont pas parallèles, elles se croisent en un point qui est solution du système linéaire

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

En particulier, pour calculer les intersections d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec les axes, il suffit de résoudre deux systèmes linéaires :

- ⋆ intersection avec l'axe des abscisses :
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ y=0;\end{cases}$$
- ⋆ intersection avec l'axe des ordonnées :
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ x=0.\end{cases}$$

Droite passant par deux points L'équation de la droite passant par les deux points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) est

$$\begin{aligned} &x=x_1 && \text{si } x_1=x_2,\\ &y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1 && \text{si } x_1\neq x_2.\end{aligned}$$

2.7 Définition (Cercle)
L'équation du cercle de centre (x_c,y_c) et rayon r est

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0,\qquad \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma\geq 0,$$

avec $x_0=-\frac{\alpha}{2}$, $y_0=-\frac{\beta}{2}$ et $r=\sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

2.4 Puissances

2.8 Propriété

① $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$

② $a^b:a^c=a^{b-c}$

③ $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$

④ $(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$

⑤ $(a:b)^c=a^c:b^c$

⑥ $(a)^c=\left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$

⑦ $\sqrt[c]{a}=a^{1/c}$

Produits à apprendre par cœur

① $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$

② $(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$

③ $(A\pm B+C)^2=A^2+B^2+C^2\pm 2AB+2AC\pm 2BC$

④ $(A-B-C)^2=A^2+B^2+C^2-2AB-2AC+2BC$

⑤ $(A^2-B^2)=(A-B)\cdot(A+B)$

⑥ $(A^3-B^3)=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$

⑦ $(A^3+B^3)=(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$

Divisibilité d'un binôme

- ⋆ le binôme x^n+a^n
  - ⋆ avec n impair n'est divisible que par $x+a$ et on a
$$x^n+a^n=(x+a)\cdot(x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1}),$$
  - ⋆ avec n pair n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ x^n-a^n
  - ⋆ avec n impair n'est divisible que par $x-a$ et on a
$$x^n-a^n=(x-a)\cdot(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}),$$
  - ⋆ avec n pair est divisible par $x-a$ et par $x+a$. Pour le factoriser, il convient de considérer le binôme comme la différence de deux carrés :
$$x^n-a^n=\left(x^{n/2}+a^{n/2}\right)\cdot\left(x^{n/2}-a^{n/2}\right).$$
On vérifie ensuite si les deux binômes ainsi obtenus sont encore factorisables sur $\mathbb{R}$.

2.5 Équations et inégalités de degré 1

	Solutions de l'équation $ax=b$	Solutions de l'inégalité $ax>b$	Solutions de l'inégalité $ax<b$
Si $a>0$	$x={}^b/_a$	$x>{}^b/_a$	$x<{}^b/_a$
Si $a<0$	$x={}^b/_a$	$x<{}^b/_a$	$x>{}^b/_a$

2.6 Équations et inégalités de degré 2

On ne considère ici que le cas $a>0$ auquel on peut toujours se ramener

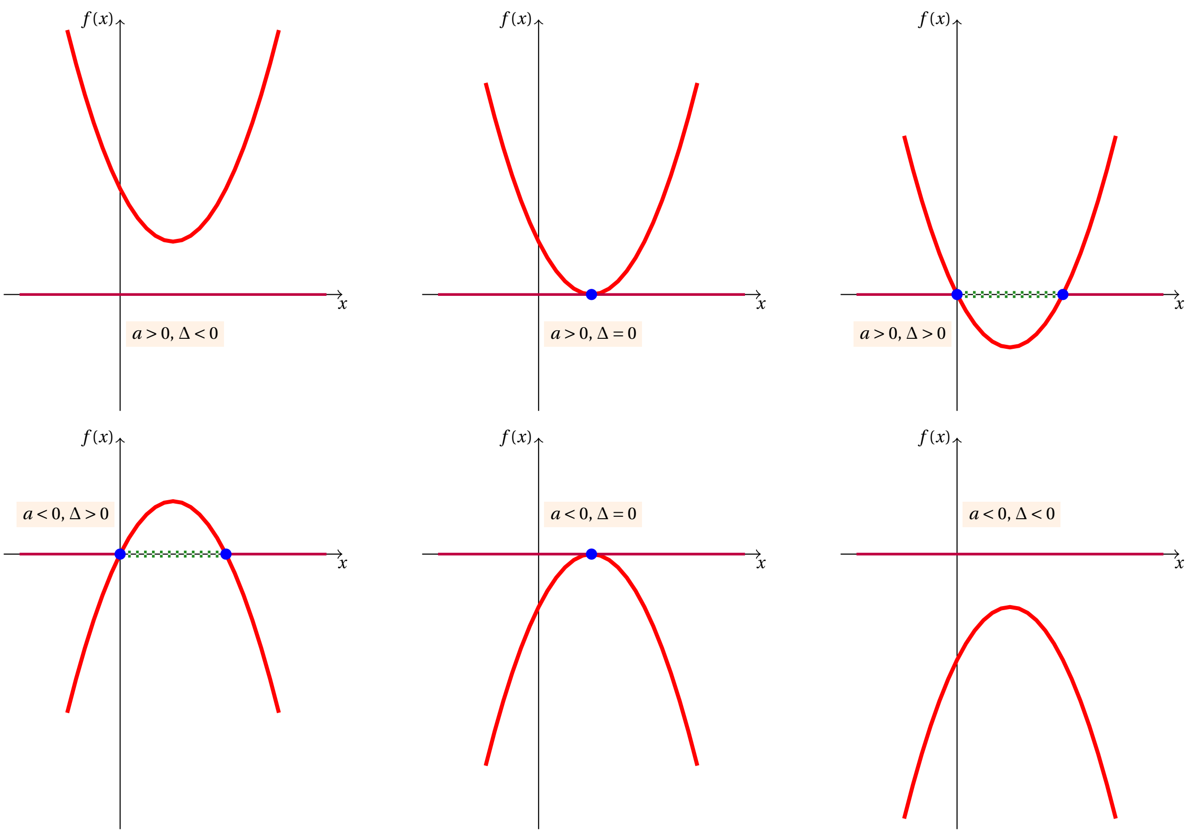
Soit $\Delta := b^2-4ac$ $(a>0)$	Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c>0$	Solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c<0$
Si $\Delta>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	$x<x_1$ ou $x>x_2$	$x_1<x<x_2$
Si $\Delta=0$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	$x\neq-\dfrac{b}{2a}$	$\nexists$ solution
Si $\Delta<0$	$\nexists$ solution réelle	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists$ solution

Rappelons que

- ⋆ $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- ⋆ $\begin{cases} x_1+x_2=-{}^b/_a \\ x_1\cdot x_2={}^c/_a \end{cases}$

Le tableau ci-dessus a une interprétation géométrique : si on associe au trinôme ax^2+bx+c la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$, on peut interpréter les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ comme les intersections de la courbe représentative de la parabole avec l'axe des x. Ci-dessous, les figures du haut représentent les trois positions possibles de la parabole lorsque $a>0$: de gauche vers la droite on a aucune intersection, une intersection et deux intersections (respectivement, $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$). En bas les trois cas lorsque $a<0$: de gauche vers la droite on a deux intersections, une intersection et aucune intersection (respectivement, $\Delta<0$, $\Delta=0$, $\Delta>0$). Pour résoudre les inégalités $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c<0$ il suffit d'étudier la position de la parabole $y=ax^2+bx+c$ par rapport à l'axe des x :

- ⋆ les cercles représentent les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$;
- ⋆ en bleu on a les solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c>0$;
- ⋆ en vert pointillé les solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c<0$.



2.7 Équations exponentielles

Une équation est exponentielle si l'inconnue apparait en exposante.

Équation	Solution
$a^x = c$ (avec $a>0$, $a \neq 1$)	$x = \log_a c$
$ma^{f(x)} = nb^{g(x)}$ (avec $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)	$\ln m + f(x)\ln a = \ln n + g(x)\ln b$
$f(a^x) = c$ (avec $a>0$, $a \neq 1$)	On pose $t := a^x$

2.8 Propriétés des logarithmes

2.9 Propriété

Soit $a>0$, $a \neq 1$.

① Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a(b_1) + \log_a(b_2)$.

② Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a(b_1) - \log_a(b_2)$.

③ Si $b > 0$ alors $\log_a(b^k) = k \log_a(b)$.

④ $\log_a(1) = 0$.

⑤ $\log_a(a) = 1$.

⑥ $\log_a(a^c) = c$.

⑦ Si $c > 0$ alors $a^{\log_a(c)} = c$.

⑧ Si $b > 0$ alors $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ avec $c > 0$ et $c \neq 1$ (Règle du changement de la base).

Notamment, on rappelle la chaîne d'égalités suivante :

$$\log_a x = -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{1/a} x = \log_{1/a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_x a}$$

2.9 Équations logarithmiques

Une équation est logarithmique si l'inconnue apparait sous le symbole de logarithme. Puisqu'on a $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln x}$, on peut toujours se ramener au cas où l'inconnue n'apparait qu'en argument du logarithme.

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f\left(\log_a g(x)\right) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

2.10 Systèmes linéaires

2.10 Définition (Système linéaire)
Soit $n, p, \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- ⋆ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- ⋆ Une SOLUTION de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ⋆ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ⋆ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.
- ⋆ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ⋆ Un système est CARRÉ si $n = p$.

Équilibrage de réactions chimiques Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes comme la conservation du nombre d'atomes, ou la conservation du nombre d'électrons (pour les réactions red-ox), ou la conservation de la charge (pour les réactions écrites sous forme ionique). Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.
Par exemple, considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1 H_2 + x_2 O_2 \to x_3 H_2O.$$

Les contraintes sont :

1. la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,
2. la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes ; en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si (x_1, x_2, x_3) équilibre la réaction, alors tous les multiples entiers de (x_1, x_2, x_3) équilibrent aussi la réaction.
Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \to 2H_2O.$$

2.11 Définition (Système échelonné)

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\begin{cases} \begin{array}{cccccccc} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array} \end{cases} \qquad (S)$$

Réduction Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \dots + 0x_p = b,$$

- ⋆ si $b \neq 0$ le système est impossible,
- ⋆ si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

Méthode du pivot de GAUSS Soit $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S).
La méthode du pivot de GAUSS comporte $n-1$ étapes : par des opérations élémentaires sur les lignes à chaque étape j on élimine l'inconnue x_j dans les lignes L_i pour $i > j$.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j,$$

on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i du système linéaire pour $i > j$.

En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

EXEMPLE

On résout par la méthode de GAUSS le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } k=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -2x_2-8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } k=2]{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } k=3]{L_4\leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 40x_4=0\end{cases}$$

donc

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

Exercices

Calcul

Exercice 2.1

Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A=\frac{51}{136},\qquad B=\frac{1015}{2450},\qquad C=\frac{9}{40}+\frac{9}{50}+\frac{18}{125},$$
$$D=1-\frac{27}{125}-\frac{549}{1000},\qquad E=\frac{549}{1000}+2\times\frac{235}{1000},\qquad F=0{,}000\,001\,25.$$

Exercice 2.2

Sans utiliser la calculatrice, calculer

$$A)\,12.5\%\text{ de }164\qquad B)\,13\%\text{ de }50\%\text{ de }800\qquad C)\,\frac{300}{30\%}\qquad D)\,14\times5\%\qquad E)\,(412-518)\times116\%$$

Exercice 2.3

Sans utiliser la calculatrice donner la valeur des expressions suivantes :

$$A)\ \frac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}\qquad\qquad B)\ \frac{\left(\frac{2^{18}\times2^{-6}}{2^9}\right)}{\left(2^{-2}\right)}$$

Exercice 2.4

Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{8}$;

ii) $\sqrt{100+69}$, $\sqrt{100}\times\sqrt{9}$, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$, $(\sqrt{100})^{-6}$.

Exercice 2.5

Soit $x\in\mathbb{R}$. On donne $A=2x$, $B=4x^2-1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C=2xB-A,\qquad D=2xC-B,\qquad E=2xD-C.$$

Exercice 2.6

Écrire sous forme d'une seule fraction irréductible la fraction $\dfrac{\left(\frac{x}{2}+4x\right)}{\left(\frac{3x+2}{4-4x}x\right)}$.

Exercice 2.7
Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $\dfrac{n^2-1}{9}-\dfrac{n+1}{6}$,

b) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4}+4\dfrac{n+1}{3}$,

c) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)^2}{4}$,

d) $\dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}-4\dfrac{(n+1)^2}{9}$,

e) $-\dfrac{1}{n(n-1)}\left[\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$.

Exercice 2.8
Pour chaque élément de $\mathbb{C}$ ci-dessous, indiquer s'il appartient à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:

i) i
ii) -5
iii) $\sqrt{2}$
iv) $-\frac{110}{11}$
v) 2
vi) $1/3$
vii) 0
viii) e
ix) $3+2i$
x) π
xi) $0.\overline{3}$
xii) $\frac{3}{2}$
xiii) i^2
xiv) $0.\overline{9}$

Puissances

Exercice 2.9
Soit $n = 10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 2.10
Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

a) $(2^2)^2$ *b)* $2^{(2^2)}$ *c)* $(2^2)^3$ *d)* $2^{(2^3)}$ *e)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$ *f)* $\dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}$.

Exercice 2.11
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{3^n}{3^{3n}},\qquad B=\frac{(2^{2n+1})^2}{2^{2n-1}},\qquad C=4^n-2^{2n-1},\qquad D=\frac{1}{(-1)^{2n+1}}+(-1)^{2n-2}.$$

Exercice 2.12
Calculer, factoriser ou simplifier :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) e^3+e^6 d) $e^{-6}e^8$ e) $2^4 4^7$ f) 2^4e^5

Exercice 2.13
Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A=1\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^5}\qquad B=(\sqrt[6]{3})^3\qquad C=\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2}\qquad D=\frac{(x^2)^n}{x^{n+1}}\qquad E=\frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F=(x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2}\qquad G=\sqrt{2^{2^{(2n+1)}}}\qquad H=(2^{2n})^{(2n)^{2^n}}\qquad I=\frac{2\times\left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Exercice 2.14
Soit n un entier naturel et soit a et u deux réels. Mettre sous la forme a^pu^q le réel $u_n = a\left(a^{2^{n+1}}u^{2^n}\right)^2$ (attention, les exposants ne sont pas $2n+1$ et $2n$ mais 2^{n+1} et 2^n).

Logarithmes et exponentielles

Exercice 2.15
En utilisant seulement la définition de logarithme (*i.e.* $a^{\log_a(b)} = b$), simplifier les expressions suivantes :

$$A = \log_5(25) - \log_5(5) \qquad B = \log_{x^2+1}(1) + \log_{2012}(1) + \log_{10^7}(1)$$

$$C = \log_{10}(0.1) + \log_{10}(0.01) + \log_{10}(0.001) \qquad D = \frac{\log_{10}(10^3) + \log_{10}^2(1) + \log_{2012}^{2012}(2012)}{2^3+2}$$

Attention : on note $\log_a^c b$ la valeur $(\log_a b)^c$.

Exercice 2.16
Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1), \qquad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \qquad C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)).$$

Exercice 2.17
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1), \qquad B = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \qquad C = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Exercice 2.18
Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Exercice 2.19
Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1\,000)$ b) $\log_5(1/25)$ c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$ e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$

f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$ g) $\log_3(108) - \log_3(4)$ h) $\log_{10}(0.1)$ i) $\log_{10}(100/67)$ j) $3\log_{10}(10)$

k) $\log_{10}(1)$ l) $\log_2(8)$ m) $\log_2(0.25)$ n) $\ln(1/e)$ o) $(\ln(e))^{-1}$

Exercice 2.20
Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right), \qquad B = \exp\left(-\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{v}\right)}\right)\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{v}\right)\right), \qquad C = \left(\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)\right)^{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)},$$

$$D = \exp\left(x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right), \qquad E = \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{x^2-x^4}\right) + \frac{1}{x}\right), \qquad F = \frac{\exp(\ln|1+x| - \ln|1-x|)}{\exp(\ln|1+x| - \ln|x-1|)},$$

$$G = \frac{1}{e}\exp\left((x+1)^2 - e^{2\ln(x)}\right), \qquad H = \frac{e^{3\ln(2x)-\ln(x)}e^{1-3\ln(x)}}{xe^{x-2}}.$$

Exercice 2.21
Résoudre l'inégalité $\log_2|x-1| \le 6 + \log_{1/2}\left((x-1)^2\right)$.

Équations et inégalités

Exercice 2.22
Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\dfrac{30}{75} = \dfrac{20}{x}$
2. $\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{5}{x-23}$
3. $\dfrac{6x}{x+14} = \dfrac{6}{8}$
4. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11} = \dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
5. $\dfrac{\sqrt{x}}{8} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
6. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4)$
7. $35x + 3(18-26x+4^2) = 70-3x$

Exercice 2.23

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2 > 10\,000$,
2. $\frac{1}{x} > 10\,000$,
3. $\frac{1}{x} < 10^{-6}$,
4. $x^2 < 0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x} > 0{,}000\,1$,
6. $x^2 > 1$.

Exercice 2.24

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Exercice 2.25

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $x|x| < 1$ .... $]-\infty,1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ .... $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
4. $|4-x^2| - |3-x| > x$ .... $]-\infty,-\sqrt{7}[\cup]-1,1[\cup]+\sqrt{7},+\infty[$
5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ .... $]-\infty,0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ .... $[-{}^1/_2, 1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ .... $]2,+\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4} < x-1$ .... $[4,+\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}} \geq x-3$ .... $]-\infty, {}^{5+\sqrt{1}7}/_2] \setminus \{-1,1\}$
10. $\sqrt{4x^2+3x-1} \geq 2x-3$ .... $]-\infty,-1] \cup [{}^1/_4,+\infty[$
11. $\dfrac{\sqrt{1-9x^2}+2x}{3x-2} > 0$ .... $[-{}^1/_3, -{}^1/_{\sqrt{13}}[$
12. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq 3$ .... $[3,+\infty[$
13. $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{3} \leq \dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$ .... $]{}^5/_2, 7]$
14. $\sqrt{4+|1-x^2|} < x + \sqrt{5}$ .... $]0,+\infty[$
15. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{3-x-\sqrt{x}} < 0$ .... $]{}^{7-\sqrt{13}}/_2,+\infty[$
16. $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}} < \sqrt{x}$ .... $[1,+\infty[$
17. $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .... $]{}^{\pi}/_3 + 2k\pi, {}^{2\pi}/_3 + 2k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
18. $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$ .... $]-{}^{\pi}/_3 + 2k\pi, {}^{\pi}/_3 + 2k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
19. $\sin(2x) < 1$ .... $x \neq {}^{\pi}/_4 + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
20. $\dfrac{1-2\sin(x)}{1-2\cos(x)} \leq 0$ .... $]-{}^{\pi}/_3 + 2k\pi, {}^{\pi}/_6 + 2k\pi] \cap]{}^{\pi}/_3 + 2k\pi, {}^{5\pi}/_6 + 2k\pi]\ \ k\in\mathbb{Z}$
21. $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{2\sin(x)-1}} \geq 1$ .... $]{}^{\pi}/_6 + 2k\pi, {}^{5\pi}/_6 + 2k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
22. $\dfrac{\tan^2(x) - \sqrt{3}\tan(x)}{\tan^2(x)-1} < 1$ .... $]-{}^{\pi}/_4 + k\pi, {}^{\pi}/_6 + k\pi[\cup]{}^{\pi}/_4 + k\pi, {}^{\pi}/_2 + k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
23. $\dfrac{e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - 5e^x + 2} > -1$ .... $]-\infty, \ln(1-{}^{\sqrt{3}}/_3)[\cup]-\ln 2, \ln(1+{}^{\sqrt{3}}/_3)[\cup(\ln 2,+\infty)$

24. $\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{1-\ln(x-2)}} < 2$ .... $\left]2, e^{2(\sqrt{2}-1)}+2\right[$
25. $\dfrac{(2/3)^{x-1}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$ .... $]1, {}^5\!/_2[$
26. $\dfrac{e^x+e^{\sqrt{x}}+2}{e^{2x}-e} \ge 0$ .... $]{}^1\!/_2, +\infty[$
27. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$ .... $\emptyset$
28. $3^{x+2} \le 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$ .... $]-\infty, -2]$
29. $x-1 < \sqrt{x+4}$ .... $[-4, {}^{(3+\sqrt{21})}\!/_2[$
30. $\log_5(x-7) > 2$ .... $]32; +\infty[)$
31. $\log_{2/3}(x^2-1) > 2$ .... $]{}^{-\sqrt{13}}\!/_3, -1[\cup]1, {}^{\sqrt{13}}\!/_3[$
32. $\log_{1/2}\sqrt{x} < \log_{1/2}|x-1|$ .... $]{}^{3-\sqrt{5}}\!/_2, {}^{(3+\sqrt{5})}\!/_2[\setminus\{1\}$
33. $3^{2-x}+2\cdot 3^x < 19$ .... $]-{}^{\ln(2)}\!/_{\ln(3)}, 2[$
34. $(2^{\sqrt{x}}-2^x)(\ln^2 x-4) \le 0$ .... $]0, e^{-2}]\cup[1, e^2]$
35. $\log_2 \dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$ .... $]0, {}^3\!/_{(2\sqrt{2})}[$
36. $\log_{1/4}\sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$ .... $]1, {}^5\!/_2[$
37. $\ln(x) - \dfrac{2}{\ln(x)} + 1 \ge 0$ .... $[{}^1\!/_{e^2}, 1[\cup[e, +\infty[$
38. $\log_{1/2}(7^{2x}-7^x+1) > 0$ .... $]-\infty, 0[$
39. $\log_2\left(\dfrac{|x|-1}{2-|x+3|}\right) \le 2$ .... $]-{}^{21}\!/_5, -1[\cup]-1, 1[$
40. $\dfrac{1}{2}\ln(x)+\dfrac{1}{2}\ln(1-x) < \ln(2)+\dfrac{1}{2}\ln(5)$ .... $]0, 1[$

Géométrie analytique

Exercice 2.26 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Exercice 2.27 (Cercles)

1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Exercice 2.28 (Paraboles)

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y=x+2$ avec la parabole d'équation $y=3x^2-5x+2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y=2x-1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Exercice 2.29

Calculer suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation $f(x)=0$ pour :

1. $f(x)=x^2-x-m$,
2. $f(x)=m^2x^2+mx+m-1$.

Exercice 2.30

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x - 2 + e^{-x} = 0$,
2. $x^4 + 3x^2 = k$, où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre,
3. $\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right)^{x^2-6x+1} = 1$.

Exercice 2.31 (Le crible de MATIYASEVITCH)

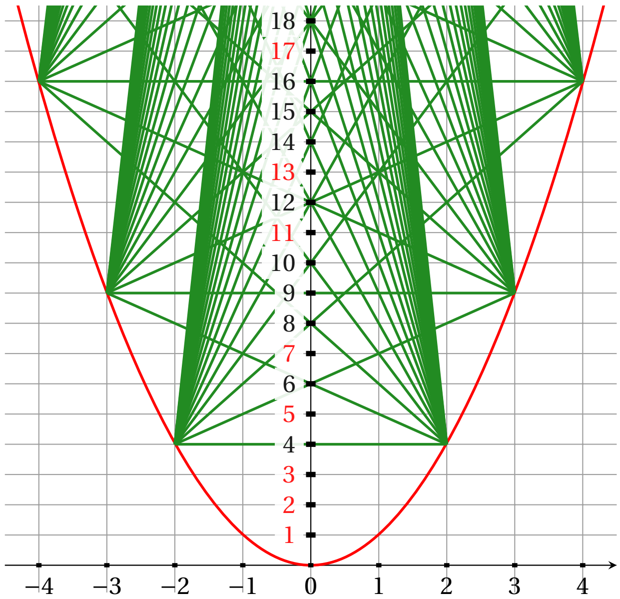
Traçons la parabole d'équation $y = x^2$. Sur ce graphe, on va considérer deux familles de points :

- ⋆ pour tout $i \geq 2$, i entier, on note A_i le point de coordonnées $(-i, i^2)$,
- ⋆ pour tout $j \geq 2$, j entier, on note B_j le point de coordonnées (j, j^2).

Relions tous les points A_i à tous les points B_j.

1. Montrer que tous les segments $[A_i B_j]$ croisent l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer qu'un nombre situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, un des segments $[A_i B_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Que représente-t-il le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier ?

Rappel : un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même.



Systèmes linéaires

Exercice 2.32

Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

$$(1)\ \begin{cases} 4x - 3y = 84 \\ 5x + 7y = 19 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

Exercice 2.33

Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

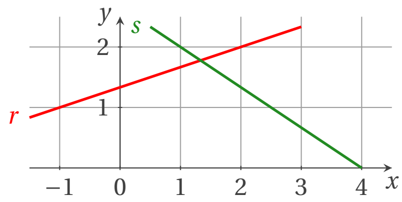
Partage de secrets *Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions sans pour autant que ceux-ci ne connaissent le contenu du message envoyé ?*

Typiquement, un message à envoyer est un nombre entier (car, par codage, on peut remplacer un texte quelconque par un nombre). Imaginons donc que l'on désire envoyer le nombre n. Considérons un polynôme de degré k, par exemple à coefficients entiers, $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + n$ dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que si deux polynômes de degré k sont égaux en $k+1$ points,

alors ils sont égaux. Autrement dit, le polynôme P est complétement caractérisé par les valeurs qu'il prend par exemple aux entiers $1,2,\dots,k+1$. On engage alors $k+1$ espions (voire un peu plus, si certains étaient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois que $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système de $k+1$ équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n. Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, cela ne leur permet nullement de retrouver n. De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.
Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Exercice 2.34

Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Exercice 2.35 (V. Guirardel)

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
Qui	7	12	6	8
Quo	11	6	10	9
Qua	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Exercice 2.36

Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x-\alpha y=1,\\ \alpha x-y=1. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 2.37

Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 2.38

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y+3z=2,\\ x-y+2z=7,\\ 3x+az=10. \end{cases}$$

Exercice 2.39 (Résolution de systèmes non carrées)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=-1,\\ 2x+y-z=1,\\ -x+y+2z=-2,\\ x+y+z=4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.40 (Résolution de systèmes non carrées)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\\ 3x+2y-4z=1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.41
Déterminer si le système suivant a une solution non nulle. Dans le cas affirmatif trouver la(les) solution(s) :

$$(S)\quad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\\ 3x-11y+12z=0. \end{cases}$$

Exercice 2.42 (Résolution de systèmes non carrées)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.43 (Résolution de systèmes non carrées avec paramètre)
Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+4x_4=6,\\ -3x_1-3x_2+6x_3-12x_4=b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Problèmes

Exercice 2.44
Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?

Exercice 2.45
Une bouteille et son bouchon coûtent 11 €. Sachant que la bouteille coûte 10 € de plus que le bouchon, combien coûte la bouteille ?

Exercice 2.46
Un grand aquarium contient 200 poissons. De ceux-ci, 99% sont des poissons rouges. On voudrait que ce pourcentage baisse à 98%. On décide donc de retirer des poissons rouges. Combien de poissons rouges doit-on enlever de l'aquarium ?

Exercice 2.47 (Paul Halmos, "*Problème pour mathématiciens, petits et grands*")
On suppose que les concombres sont composés de a% d'eau. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain les concombres ne contient plus que b% d'eau avec $0 < b < a < 100$. Quel est le poids des concombres restantes ?
Considérer par exemple $M = 500$, $a = 99$ et $b = 98$.

Exercice 2.48
Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% de votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

Exercice 2.49
Un commercial touche une commission de 15% sur les ventes qu'il réalise au cours d'un mois. Si pour le mois d'avril le commercial a touché 1400 € de commission, quel est le montant des ventes qu'il a perçu en avril ?

Exercice 2.50
D'une manière générale, le groupe sanguin AB est le plus rare et représente 4% de la population humaine. Le rhésus négatif, lui aussi, est assez rare (15% de la population uniquement). Si la population totale de la planète est de 6 milliards de personnes, combien sont de type AB- ?

Exercice 2.51
Le prix du blé dans un certain pays est indexé sur l'inflation. Au 1er janvier 1990, le blé coûtait 140 dollars la tonne. L'inflation de 1990 était de 3%. Par contre, en 1991, le pays a connu une déflation de 1.5%. Combien coûtait une tonne de blé au 1er janvier 1992 ?

Exercice 2.52
La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

Exercice 2.53
Pendant la période des soldes, Éva trouve un pull marqué 59 € sur un stand avec une pancarte «−40%». Elle aime beaucoup le pull, mais il y a une petite tâche qu'Éva compte éliminer elle-même. La vendeuse lui propose une réduction supplémentaire de 10% sur le prix de caisse. Combien Éva payera-t-elle pour le pull ?

Exercice 2.54
Un certain dessert coûte 12 € TTC. Avec la baisse de TVA sur la restauration, de 19.6% à 5.5%, quel sera le nouveau prix de ce dessert ?

Exercice 2.55
Antoine place 1000 € sur son Livret A. Quel montant recevra-t-il au bout de deux ans si le taux en vigueur pour le Livret A est maintenu au niveau de 1.2% ?

Exercice 2.56
Un capital a été placé dans une banque à un taux annuel de 4.5%. Les intérêts accumulés à la fin de l'année s'élèveront à 126 €. Quel est le montant initialement placé ?

Exercice 2.57
Un artisan installe des fenêtres dans les habitations. Si un particulier achète uniquement une fenêtre sans installation, le taux de TVA applicable est de 19.6%. Si un particulier achète une fenêtre et commande son installation auprès du même artisan, le taux de TVA applicable au produit et au service est de 5.5%. Si le prix HT d'une fenêtre est 600 € et le prix HT de l'installation est de 150 €, quelle est la différence de prix des deux options pour le particulier ?

Exercice 2.58
Sur 1.4 million d'iPhone vendu depuis juin, environ 250 000 ont été débloqué grâce à des logiciels pirates. Quel pourcentage représente cela ? (Arrondir à 1% près).

Exercice 2.59
Le service de restauration dans un avion propose un plat au choix : soit de l'agneau, soit du poulet. 42% des passagers ont commandé l'agneau, 36% ont commandé le poulet, et les autres 55 passagers n'ont pas pris de plat chaud. Combien y a-t-il de passagers à bord de l'avion ?

Exercice 2.60
Un couple achète un panneau photovoltaïque au prix de 1674.40 € TTC. Le gouvernement octroie un crédit d'impôt applicable à ce type d'installation à hauteur de 40% du prix HT. Si le taux de TVA en vigueur applicable aux panneaux photovoltaïques est de 19.6%, quel est le montant du crédit d'impôt dont bénéficiera le couple ?

Exercice 2.61
Pendant les soldes un magasin donne une remise de 30%. Le prix non-soldé d'une veste est de 70 € ; quel est son prix soldé ? Le prix soldé d'une chemise est de 21 € ; quel est son prix non-soldé ?

Exercice 2.62
64% des élèves d'une classe sont des garçons et 25% parmi ces garçons apprennent l'allemand. Quel est le pourcentage des garçons qui font de l'allemand dans la classe ?

Exercice 2.63
Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Exercice 2.64
Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Exercice 2.65
Un prix subit les variations annuelles suivantes : +25%, −5%, +10%, −10%, −8%, +20%. À combien s'élève la variation annuelle moyenne ?

Exercice 2.66
M. Dezèle fait un emprunt de 100 000 € à sa banque. Le taux d'intérêts est de 3% par an, ou encore (3/12)% par mois. Chaque mois M. Dezèle rembourse un même montant à la banque, appelé «annuité constante mensuelle». Après 10 ans exactement le crédit est entièrement remboursé. On note

- ⋆ $t = 0.03/12 = 0.0025$ le taux d'intérêt mensuel,
- ⋆ $d = 120$ la durée du crédit en mois,
- ⋆ $S_0 = 100000$ l'emprunt initial,
- ⋆ a l'annuité constante mensuelle.

1. On suppose que l'emprunt commence le 1^er^ janvier et que le payement de l'annuité se fait à la fin de chaque mois. On note S_1 la dette au 1^er^ février, S_2 la dette au 1^er^ mars, etc. Montrer que $S_{n+1} = (1+t)S_n - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir la formule qui donne l'annuité a en fonction de la durée du crédit, du taux d'intérêt et du montant initial de l'emprunt.
3. Utiliser cette formule pour calculer l'annuité de M. Dezèle. Quel est le montant total des intérêts payés lors de ce crédit ?

Exercice 2.67
En Irlande, le prix d'un certain livre est 12.5 € HT ou 13.1 € TTC. Quel est le taux de la taxe sur la valeur ajoutée applicable aux livres en Irlande ?

Exercice 2.68
Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Exercice 2.69
Pour tenir le feu dans la cheminée pendant 5 heures, il faut 3 kg de bois. Combien de kg de bois faut-il pour tenir le feu pendant 24 heures ?

Exercice 2.70
Une voiture consomme 6 L d'essence pour 100 km. Combien de kilomètres peut-on parcourir avec un réservoir plein dont les dimensions sont 20 cm×30 cm×70 cm ?

Exercice 2.71
La distance entre New York et Los Angeles est 3950 km. Quelle sera cette distance sur une carte 1 ÷ 10 000 000 ?

Exercice 2.72
Une chambre a les dimensions 10 m par 15 m. Sur un plan de l'appartement, la longueur de la chambre est de 10 cm. Quelle sera sa largeur sur le plan, en cm ?

Exercice 2.73
La longueur de l'équateur de la Terre est de 40 000 km. Sur un globe d'école, l'équateur mesure 80 cm. À quelle échelle le globe a-t-il été réalisé ?

Exercice 2.74
Un épicier a compté par erreur un poids de 50 g au lieu d'un poids de 20 g dans une pesée qu'il a estimée à 375 g d'épices. Celles-ci coûtent 28 euro le kilo. Quelle somme a-t-il demandée en trop ?

Exercice 2.75
Le litre de bon lait pèse 1.030 kg. On achète 15 litres de lait qui pèsent 15.375 kg. Montrer que le lait n'est pas pur. Quelle quantité d'eau y a été mélangée ?

Exercice 2.76
Nina voudrait estimer la distance entre Paris et Berlin en consultant la carte dont l'échelle est indiquée comme 1 :5 000 000. Elle mesure la distance avec une règle et obtient 21 cm. Quelle est la distance entre Paris et Berlin ?

Exercice 2.77
Si une bonbonne pleine de lait pèse 25 kg et que la même bonbonne à moitié pleine (ou à moitié vide selon votre conception de la vie…) pèse 13 kg, combien pèse la bonbonne vide ?

Exercice 2.78
Plusieurs métaux fondus ensemble constituent un alliage. Pour diverse raisons (dureté, couleur…), les bijoux dits en or ne sont jamais faits uniquement d'or. Par exemple, un bijou en or jaune est un alliage composé d'or pur, d'argent et de cuivre. Un bijou en or pesant 16 grammes contient 12 grammes d'or pur. En gardant la même proportion dans l'alliage, combien d'or pur contiendrait un bijou de 24 grammes ?

Exercice 2.79
Un pack «raquette + balle» coûte 1.10 €. Vous avez déjà une raquette et vous ne voulez acheter que la balle. Le vendeur ne se souvient plus du prix de la balle, mais il dit : «Je me souviens que la raquette coûte un euro de plus que la balle». Combien coûte la balle seule ?

Exercice 2.80
Paul et Marie ont acheté des pommes. Si Paul donne 5 de ses pommes à Marie, elle aura autant de pommes que lui. Si Marie donne 5 de ses pommes à Paul, il aura 5 fois plus de pommes qu'elle. Combien de pommes Paul et Marie ont-ils acheté ensemble ?

Exercice 2.81
Dans un panier de fruits, 1/7 de tous les fruits sont des ananas, 3/8 des pamplemousses et 2/5 des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Exercice 2.82
Le prix d'un carton est $5\,€\cdot m^{-2}$. Vous achetez un rectangle de $120\,cm \times 30\,cm$. Combien ça coûte ?

Exercice 2.83
André gagne 1500 € net par mois. Il en déduit un tiers pour son loyer, 10 € par jour pour les repas, 60 € pour ses frais de transport et une centaine d'euros pour des frais divers. Quel est le montant qui reste à la disposition d'André ? (Compter 30 jours par mois).

Exercice 2.84
Chez un boucher, un acheteur prend un kilo et demi de bœuf à 24 € le kilo, quatre côtes de porc, chacune pesant 100 g, à 11 € le kilo, et deux cailles à 3.5 € la pièce. Quel est le montant total des achats ?

Exercice 2.85
Il faut vider un chauffe-eau en forme de cylindre horizontal qui occupe un espace de $60\,cm \times 60\,cm \times 1\,m$. Si le chauffe-eau a été vidé en 1.5 h, quel est le débit du tuyau d'évacuation en $L\cdot min^{-1}$?

Exercice 2.86
Mes 4 perroquets bleus mangent 4 kg de graines en 4 jours. Mes 5 perroquets verts mangent 5 kg de graines en 5 jours. Mes 8 perroquets oranges mangent 8 kg de graines en 8 jours. Quels sont les perroquets qui ont le plus d'appétit ?

Exercice 2.87
Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Exercice 2.88
Le produit "pH-Moins granulés" sert à baisser le pH de l'eau des piscines. Il s'utilise lorsque le pH est supérieur à 7.4 : pour baisser de 0.1 le pH d'un mètre cube d'eau il faut y diluer 10 g de produit. Si on a une piscine circulaire autoportante de 2.44 m de diamètre et dont la hauteur de la ligne d'eau est de 50 cm et le pH est de 7.8, combien de produit doit-on ajouter ?

3
Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Exercice 3.1
Écrire les tables de vérité suivantes :

1. "non(P) et Q"
2. "non(P et Q)"
3. "(non(P)) ou (non(Q))"
4. "(non(P)) ou Q"

Exercice 3.2
Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque (on ne demande pas de prouver la véridicité) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x = 3 \implies x^2 = 9$
3. Si on est en décembre alors les vacances de Noël sont proches.

Exercice 3.3
Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
2. Cléopâtre était chinoise ou les grenouilles aboient.
3. Les roses sont des animaux ou les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Paris est en France ou Madrid est en Chine.
6. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
7. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.
8. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
9. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
10. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
11. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
12. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Attention : dans le langage courant la proposition "soit P soit Q" se traduit par un "ou" exclusif au lieu du "ou" logique.

Exercice 3.4
Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \le 1$" et $Q(x) =$"$x \ge 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "non(P) $\wedge\, Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "non(P) $\vee\, Q$" est fausse

Exercice 3.5
La relation $p \implies q$ se lit "si p, alors q". Que signifie-t-elle ?

- ☐ p est une condition suffisante de q
- ☐ q est une condition nécessaire de p
- ☐ pour que q, il suffit que p
- ☐ pour que p, il suffit que q
- ☐ pour que p, il est nécessaire que q
- ☐ p seulement si q
- ☐ q seulement si p

Exercice 3.6

1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Exercice 3.7

On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Exercice 3.8

S'il pleut, Jean va au travail en bus. Hier Jean est allé au travail à vélo. Est-il possible d'établir avec certitude si hier il a plu ? Ce matin Jean est allé au travail en bus. Est-il possible d'établir avec certitude si ce matin il pleuvait ?

Exercice 3.9

Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.» Franchiriez-vous cette porte ?

Exercice 3.10 (Th. CHAMPION)

On considère la proposition suivante :

"Si le TP de Chimie a commencé alors tous les étudiants ont mis leur blouse."

1. Écrire la contraposée et la négation de la proposition.
2. Si la proposition est vraie et on constate que tous les étudiants ont mis leur blouse, peut-on déduire que le TP a commencé ?

Exercice 3.11 (Th. CHAMPION)

On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

"Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 3.12 (Th. CHAMPION)

On effectue une expérience chimique pour laquelle on peut seulement faire varier la température ou ajouter un catalyseur. On connait le principe suivant :

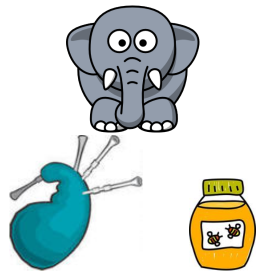
"Si on augmente la température de 10 degrés et si on n'ajoute pas de catalyseur alors la réaction va deux fois plus vite que normalement."

1. Écrire la contraposée du principe ci-dessus, c'est-à-dire compléter la phrase "Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors…".
2. On observe que la température a augmenté de 10 degrés et que la réaction va 3 fois plus vite que normalement, que peut-on en déduire ?
3. On observe que la réaction va 2 fois plus vite que normalement, peut-on en déduire quelque chose sur la variation de température ?
4. Que peut-on en déduire si la température n'augmente pas et la réaction va 3 fois plus vite que normalement ?

Exercice 3.13 (Th. CHAMPION)

On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts" ;
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse" ;
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel" ;
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".



On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 3.14

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend ses valeurs entre -2 et 3
4. f ne prend que des valeurs entiers
5. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1,1[$

Exercice 3.15

Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$
3. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
6. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$
7. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 \le n^3$
8. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \ge x$
9. $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \big(n > p \implies n + p > 2p\big)$

Exercice 3.16

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x = 3) \text{ alors } (y = 5 \text{ et } z = 1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».

b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».

c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».

d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Exercice 3.17

Pour tout entier naturel n, soit P_n une assertion portant sur n et telle que si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est également. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit faux. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

☐ P_{n_0-1} est faux

☐ P_n est faux pour tout entier $n \le n_0$

☐ P_{n_0+1} est faux

☐ P_n est faux pour tout entier $n \ge n_0$

☐ P_n est faux pour tout entier n

On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit vrai. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

☐ P_{n_0-1} est vrai

- ☐ P_n est vrai pour tout entier $n \leq n_0$
- ☐ P_{n_0+1} vrai faux
- ☐ P_n est vrai pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ P_n est vrai pour tout entier n

Exercice 3.18

Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2)$,

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$,

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$,

Exercice 3.19

Montrer que l'assertion suivante est vraie (n désigne un nombre entier, *i.e.* $n \in \mathbb{Z}$) : "n^2 impair $\implies$ n impair". Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 3.20

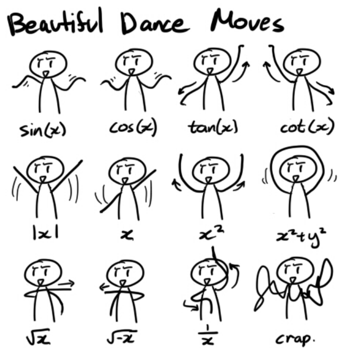
Montrer que l'assertion suivante est vraie (p et q désignent un nombre naturel, *i.e.* $p, q \in \mathbb{N}$) : "$\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2} \implies p \neq q$".

Exercice 3.21

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que l'assertion suivante est vraie : "Dans $a^2 + b^2 = c^2$ il y a toujours au moins un des trois nombres, a, b ou c qui est pair".

Triplets pythagoriciens Voici une méthode astucieuse pour produire des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des triplets de nombres entiers non-nuls qui satisfont la relation $a^2 + b^2 = c^2$. On choisit deux nombres entiers strictement positifs et on appelle le plus grand de ces deux nombres x et l'autre, le plus petit, y. On pose $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$ et $c = x^2 + y^2$. On obtient ainsi un triplet pythagoricien. En effet, on observe que

$$a^2 + b^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = c^2.$$



4
Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition, image, image réciproque

Exercice 4.1
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x) = e^x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2+x+1}, \qquad f_5(x) = e^{2x} - (x+1)e^x, \qquad f_6(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x}, \qquad f_8(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+e^x}, \qquad f_9(x) = \ln(x) - x,$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^x}, \qquad f_{11}(x) = x^{1/x}, \qquad f_{12}(x) = x^3\ln(x),$$

$$f_{13}(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}, \qquad f_{14}(x) = \sqrt{x^2}, \qquad f_{15}(x) = (\sqrt{x})^2.$$

Exercice 4.2
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(e^x) \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\ln(x)}$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1-x}{1-x^2} \qquad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{|x|} \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(|x|)$$

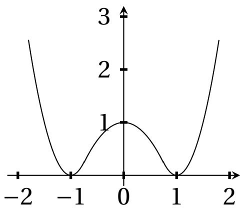
Exercice 4.3
Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^5 - 3x^2 + 2x - 7$
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
3. $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$
4. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
6. $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$
7. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
8. $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$
9. $x \mapsto \sqrt{x^2-3x-4}$
10. $x \mapsto \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$
11. $x \mapsto \ln(1-x)$
12. $x \mapsto \ln(1-x^2)$
13. $x \mapsto |\ln(x)|$
14. $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
15. $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$
16. $x \mapsto \tan(2x)$
17. $x \mapsto \frac{1}{\sin(2x)}$
18. $x \mapsto \frac{1}{x\cos(x)}$
19. $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}$
20. $x \mapsto \left(\frac{x^2-2x}{x^2+4x+3}\right)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
21. $x \mapsto \sqrt{3 - \log_2(x+5)}$.

Exercice 4.4
On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.

3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?



Exercice 4.5

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$$A = [0,1] \qquad B =]-1,4[\qquad C = [0,+\infty[\qquad D =]-\infty,5]$$

Exercice 4.6

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B := [-1,4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Exercice 4.7

Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Trouver $f(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 4.8

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

(1) $f(A)$, (2) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, (3) $\sup_A f$, (4) $\inf_A f$.

Exercice 4.9

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

(1) $f(A)$, (2) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, (3) $\sup_A f$, (4) $\inf_A f$.

Exercice 4.10

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - x^2$. Soit $B = [-3,1]$. Trouver

(1) $f^{-1}(B)$, (2) $f\big(f^{-1}(B)\big)$, (3) $\sup_B f^{-1}$, (4) $\inf_B f^{-1}$.

Exercice 4.11

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x-1)^2$. Soit $B = [-1;1[$. Trouver

(1) $f^{-1}(B)$, (2) $f\big(f^{-1}(B)\big)$, (3) $\sup_B f^{-1}$, (4) $\inf_B f^{-1}$.

Exercice 4.12

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x+1)^2$. Soit $B = [-1;1[$. Trouver

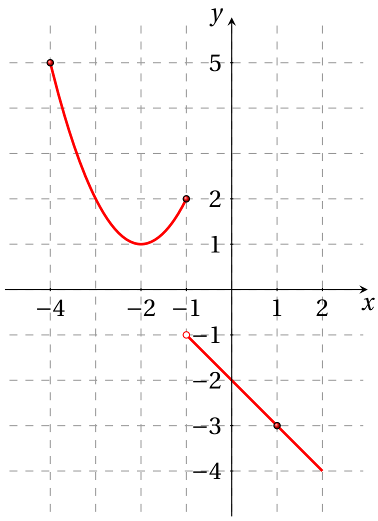
(1) $f^{-1}(B)$, (2) $f\big(f^{-1}(B)\big)$, (3) $\sup_B f^{-1}$, (4) $\inf_B f^{-1}$.

Exercice 4.13
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

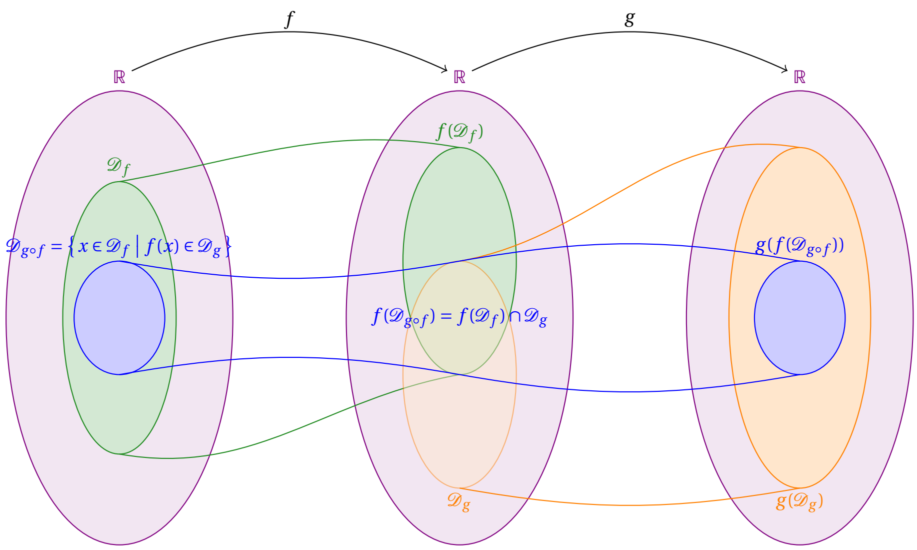
$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 & \text{si } x \le -1, \\ -x-2 & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

et représentée ci-contre. Soit $A = [-4, 1]$. Trouver

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}(f(A))$,
3. $f^{-1}(A)$,
4. $f(f^{-1}(A))$.



Composée de fonctions



Exercice 4.14
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u\colon x \mapsto 2x-8$ et $v\colon x \mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 4.15
Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{1}{1-x} & & x \mapsto \sqrt{x} & & x \mapsto x^2 \\ u &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & v &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & w &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{1}{1+x} & & x \mapsto \ln(x) & & x \mapsto e^x \end{aligned}$$

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

- ⋆ $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ g \circ f$;
- ⋆ $u \circ v$, $v \circ u$, $w \circ v \circ u$.

Exercice 4.16
Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux

formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Parité

Exercice 4.17

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x) = x^2 - 1 + \sin^2(x), \qquad f_2(x) = \frac{\tan(x) - x}{x^3 \cos(x)}, \qquad f_3(x) = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan(x)}, \qquad f_4(x) = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos(x).$$

Exercice 4.18

Démontrer les propositions suivantes.

1. La somme de fonctions paires est une fonction paire.
2. La somme de fonctions impaires est une fonction impaire.
3. Le produit de deux fonctions paires est pair.
4. Le produit de deux fonctions impaires est pair.
5. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Périodicité

Exercice 4.19

Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(3x), \qquad f_2(x) = \sqrt{\tan(x)}, \qquad f_3(x) = \cos^4(8x), \qquad f_4(x) = |\cos(5x)|,$$

$$f_5(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \qquad f_6(x) = \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}, \qquad f_7(x) = \cos(5x)\sin(3x), \qquad f_8(x) = \cos(3x)\sin(3x).$$

Fonctions usuelles et graphes

Exercice 4.20

Pour chaque fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 1 - x^2$
3. $f(x) = -2(x+1)^2$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 3\sqrt{x-1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x} - 1$
7. $f(x) = \ln(x)$
8. $f(x) = \ln(-x)$
9. $f(x) = \ln(x-1)$
10. $f(x) = e^x$
11. $f(x) = e^{x-1}$
12. $f(x) = e^{-x}$
13. $f(x) = \cos(x)$
14. $f(x) = \cos(2x)$
15. $f(x) = 1 + \cos(2x)$
16. $f(x) = |x|$
17. $f(x) = |-x|$
18. $f(x) = -|x|$
19. $f(x) = \frac{1}{x}$
20. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
21. $f(x) = \frac{1}{2x}$

Exercice 4.21
Soit $f: x \mapsto |x-3|-|2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction de x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4.22
On considère la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Exercice 4.23
Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point !) :

$$f\colon x \mapsto x, \qquad g\colon x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h\colon x \mapsto x^2, \qquad u\colon x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 4.24
Donner les tableaux de variations des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f\colon x \mapsto -5x^2, \qquad g\colon x \mapsto x^2-4, \qquad h\colon x \mapsto 0.5x^2+2.$$

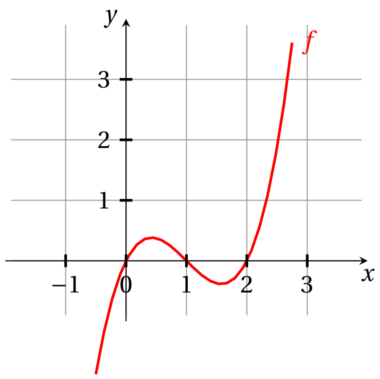
Exercice 4.25
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+6x+8}-\sqrt{x^2-1}$. Donner son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exercice 4.26
Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = 2x$, $g(x) = 12x$, $h(x) = 2x+12$.

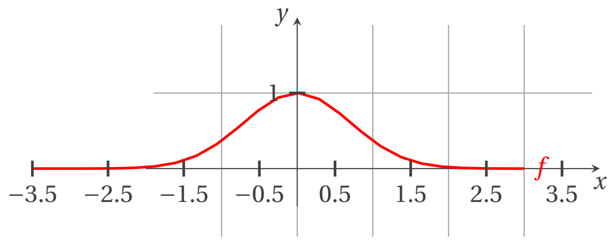
Exercice 4.27
Une fonction affine prend la valeur H au point r et son graphe passe par l'origine. Quelle est son équation ?

Exercice 4.28
Tracer le graphe des fonctions définies par $f(x) = m(x-a)+b$ pour différentes valeurs de a, m et b. Identifier ces trois paramètres sur un graphe général.

Exercice 4.29
Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 4.30
Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 4.31
Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Exercice 4.32
Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x} + 2$, $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$, $f_4(x) = \frac{1}{x-2}$, $f_5(x) = 2\frac{1}{x}$, $f_6(x) = \frac{1}{2x}$, $f_7(x) = \frac{1}{x-3} + 2$, $f_8(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

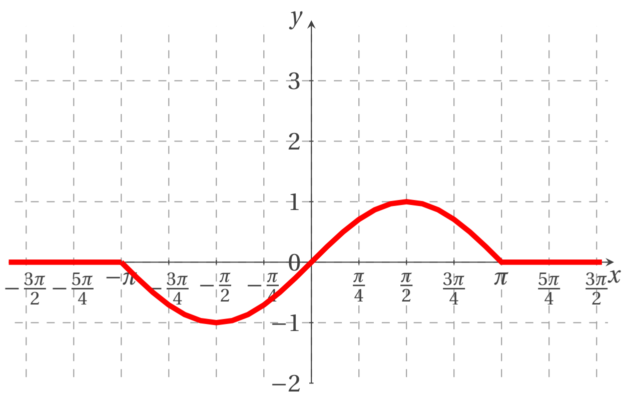
Exercice 4.33
Tracer dans le même repère le graphe des fonctions définies par $f(x) = \dfrac{3+2x}{7+5x}$, $g(x) = 3 + \dfrac{3+2x}{7+5x}$.

Exercice 4.34
Tracer le graphe de la fonction définie par $H(r) = \dfrac{r-\delta}{2r-3}$ où δ est une constante. Discuter les cas en fonction de δ.

Exercice 4.35
Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi;\pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

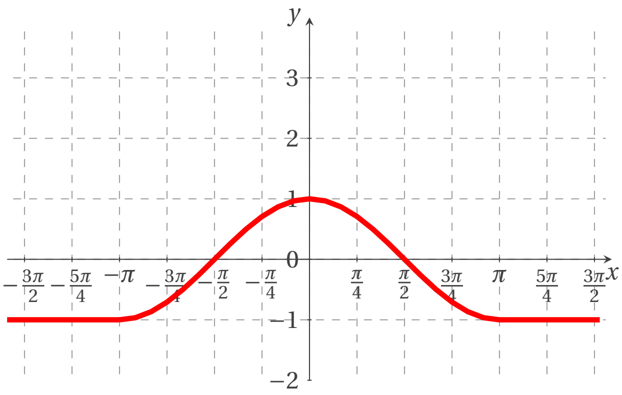
Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Exercice 4.36
Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [-\pi;\pi], \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Suggestion : utiliser les transformations élémentaires $f_1(x) = f(2x)$, $f_2(x) = f_1\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x) = 2f_2(x) = 2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $g(x) = 1 + f_3(x) = 1+2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 4.37
Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{ax+3}{x+1}$ pour différentes valeurs de a.

Exercice 4.38
Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1,2,3,4$.

Exercice 4.39
Tracer le graphe des fonctions définies par $f(x) = 4(1-\cos(x))$, $g(x) = -2\cos(5x-6)$.

Exercice 4.40
Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = \log_a(x)$ pour $a = e$, $a = 1/e$, $a = 10$.

Exercice 4.41
Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = -e^{-x}$ et $f_4(x) = 1-e^{-x}$.

Exercice 4.42
Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

Exercice 4.43 (Échelles de température)
Une température de 32°F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212°F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit ?

Exercice 4.44 (Inclinaison et panneaux routiers)
Les panneaux routiers indiquent les inclinaisons des routes au moyen de pourcentages. Une route dont l'inclinaison est de 7.5% est une route pour laquelle l'altitude augmente ou diminue de 7.5 m lorsque on se déplace horizontalement de 100 m. Sur autoroute, l'inclinaison maximale est de 5%. À quelle angle cette inclinaison correspond-t-elle ?

Exercice 4.45
Une route fait un angle de 11° avec l'horizontale. Quelle distance a-t-on parcouru lorsqu'on se trouve 100 m plus haut que le point de départ ?

Exercice 4.46
Un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est inscrit dans un cône de hauteur H et de rayon R. Exprimer H en fonction de r, h et R.

Exercice 4.47
Un réseau de mobilophonie annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Exercice 4.48 (Gas parfaits)
D'après la loi de BOYLE-MARIOTTE pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Exercice 4.49
La concentration C d'un réactif d'une réaction chimique de second ordre est donnée par $C(t) = \dfrac{C_0}{1+kC_0 t}$ où C_0 est la concentration initiale et $k > 0$ est une constante cinétique chimique. Tracez le graphe de la fonction $C\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pour différentes valeurs de k.

Exercice 4.50
Dans une solution à 25 °C, la liaison entre la concentration en ions OH^- et celle en ions H^+ est donnée par $[OH^-][H^+] = 10^{-14}$. Représenter une de ces deux concentrations en fonction de l'autre.

Exercice 4.51
D'après MICHAELIS et MENTEN, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S]+K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de MICHAELIS-MENTEN spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Exercice 4.52
La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Exercice 4.53
Quel volume d'air faut-il insuffler dans un ballon sphérique pour que son rayon passe de R à $R+1$?

Exercice 4.54
Une tour de contrôle d'une hauteur de 10 m se situe à 100 m d'une piste d'envol. Exprimer la distance entre un avion sur la piste et le sommet de la tour de contrôle en fonction de la position de l'avion.

Exercice 4.55
Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Exercice 4.56
Un observateur situé à une hauteur de h mètres du niveau de la mer observe l'horizon. Quel est le point le plus distant qu'il découvre si la Terre est parfaitement sphérique et l'équateur mesure 40 000 km ? La plus courte distance entre la côte de la France et celle de la Grande-Bretagne est de 17 km. À quelle hauteur faut-il se placer pour découvrir la côte anglaise ?

Exercice 4.57
D'après la loi de TORRICELLI, si on perce un trou à la base d'une colonne d'eau d'une hauteur h m, l'eau s'échappe à une vitesse de $\sqrt{2gh}$ m·s^{-1} où g =9.81 m·s^{-1}. Faire une représentation de l'évolution de $2gh$ en fonction de la vitesse de l'écoulement. Trouver la réciproque de cette fonction et tracer son graphe. Comment évolue la vitesse lorsque la hauteur est multipliée par deux ?

Exercice 4.58
Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 m·s^{-1}). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

Exercice 4.59
L'intensité de certaines étoiles varie en manière sinusoïdale. L'intensité d'une de ces étoile possède une période de 5.4 jours et une intensité qui varie entre $4+0.35$ et $4-0.35$. Trouver une expression pour l'intensité en fonction du temps.

Exercice 4.60
Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi $M(t) = M_0 \exp(-0.000436t)$, où M_0 représente la masse de radium présente au temps $t = 0$ et t est donné en années. Tracer le graphe de la fonction M. Au départ de $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse se réduise de moitié ? Et au départ de $t = 10$?

Exercice 4.61
L'évolution de la population mondiale P durant le XX^e siècle peut être approchée au moyen d'une fonction exponentielle par

$$P(t) = 0.0083 \times (1.0137)^t$$

où t désigne l'année considérée. Quand la population dépassera-t-elle 7 milliards d'habitants ? Soit $t = 1900$; combien de temps faut-il attendre pour que la population double ? Même question en $t = 2000$.

Exercice 4.62
L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Exercice 4.63
La vitesse v d'une masse m soumise à la pesanteur et à une force de frottement directement proportionnelle à v est donné par

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + Ke^{-\mu t/m},$$

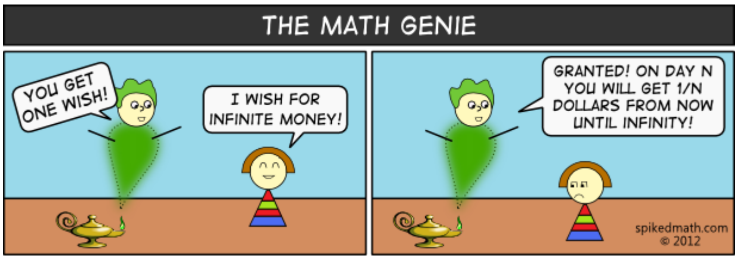
où m, g et μ sont des constantes positives. Déterminer la valeur de K pour laquelle $v(0) = v_0$ et tracer le graphe de la fonction $t \mapsto v(t)$.

Exercice 4.64
Le mathématicien P.F. VERHULST a proposé au XIX^e siècle un modèle de croissance de population. Dans ce modèle, la population P au temps t est donnée par

$$P(t) = P_{\max}\frac{\exp(rP_{\max}t)}{K + \exp(rP_{\max}t)}$$

où $P_{\max}$ est la population maximale et $r > 0$ et $K > 1$ sont des constantes. Simplifier l'expression et tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs des constantes.

Exercice 4.65
Le rayon d'une sphère est multiplié par deux ; comment évolue son volume ? Comment évolue le volume d'un cube dont la longueur des côtés est multipliée par deux ?

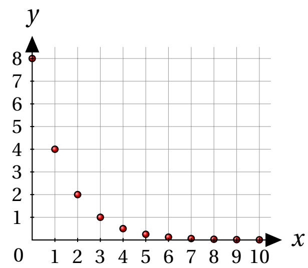


5

Suites numériques et limites

Exercice 5.1 (Lecture graphique, suite géométrique)

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.



1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 5.2 (Pression atmosphérique, suite géométrique)

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n+100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Exercice 5.3 (Suite géométrique)

Une population microbienne voit son effectif augmenter d'à peu près 10% toutes les heures. Sachant qu'elle comporte 200 individus au moment où nous l'observons, qu'en sera-t-il au bout de 24 heures ? Au bout de n heures (où n est un entier naturel) ?

Exercice 5.4 (Suite géométrique)

Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5 (Suite arithmétique)

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13 200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11 600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 € ?

4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 5.6 (Le nénuphar glouton)

Un nénuphar vit paisible dans sa mare et double de taille tous les jours. Au 50ème jour de son existence, il a déjà recouvert la moitié de sa mare, combien de temps va-t-il mettre pour recouvrir la totalité de la mare ?

Exercice 5.7

Étudier la limite pour $n \to +\infty$ des suites suivantes :

a) $\frac{1}{n} + n^2 + 1$ b) $\frac{n^2-1}{n+1}$ c) $\frac{\sin(n)+2}{n+3}$ d) $\frac{2n}{n^3+1}$

e) $\sqrt{n^5+3n} - n$ f) $n - \sqrt{n^3-3n}$ g) $\frac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$ h) $\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^n$

i) $\left(1-\frac{e}{n}\right)^n$ j) $n - \sqrt{n^2-3n}$ k) $\frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ l) $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Exercice 5.8

Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-3)(2-3\sqrt{n})}.$$

Exercice 5.9

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin(n).$$

Exercice 5.10

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, b) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, c) $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left((-1)^n-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, e) $\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, f) $\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$,

g) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, h) $\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{(-1)^n}{n}\right)$, i) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$,

j) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, k) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$, l) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$,

m) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$, n) $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\left(\frac{3}{n}\right)-\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right)$, o) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n}$.

Exercice 5.11 (Série harmonique)

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, diverge vers $+\infty$.

Exercice 5.12

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k}\right)$, est convergente ;

Exercice 5.13

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes : $\forall n\in\mathbb{N}^*$

a) $u_n > \ln n$

b) $\dfrac{1}{n+1} \le u_n \le \dfrac{1}{n}$

c) $u_0 < 1$, $(u_n)_n \nearrow$ et $u_n < 1+\dfrac{1}{n}$

d) $u_n = \sqrt[n]{n}$

e) $u_n = \ln n + \sin(n)$

f) $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$

g) $u_n = \dfrac{n}{e} + \dfrac{1}{e^n}$

h) $u_n = \dfrac{n}{n+1}\ln n$

i) $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

j) $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$

k) $u_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

l) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n = (n^2+n+1)^{1/n}$

n) $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

o) $u_n = (-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$

p) $u_n = \sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$

q) $u_n = \sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$

r) $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}$

s) $u_n = (-1)^n\dfrac{4n-1}{2n+3}$

t) $u_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{3n+1}$

u) $u_n = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{n}\right)$

v) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n\sqrt{n}+1}$

w) $u_n = (-1)^n\dfrac{6n+3}{2n-1}$

Exercice 5.14

Étudier le comportement des suites

$$a_n = \frac{\cos(n)}{e^{3n}+1} \qquad \text{et} \qquad b_n = \left(e^{-4n}+\frac{1}{n}\right)(\sin(n))$$

Exercice 5.15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n\in\mathbb{N}, \exists M\in\mathbb{R}, u_n \ge M$

(2) $\exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n \ge M$

(3) $\exists n\in\mathbb{N}, \forall M\in\mathbb{R}, u_n \ge M$

(4) $\forall M\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N}, u_n \ge M$

(a) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$.”

(b) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$.”

(c) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement”

(d) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M.”

Exercice 5.16

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$. Que signifient les assertions suivantes ?

1. $\forall n\in\mathbb{N}, \exists M\in\mathbb{R}, u_n \le M$
2. $\exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n \le M$
3. $\exists n\in\mathbb{N}, \forall M\in\mathbb{R}, u_n \le M$
4. $\forall M\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N}, u_n \le M$

Exercice 5.17

$\boxed{\text{V}}$rai ou $\boxed{\text{F}}$aux ?

1. Si une suite $(|u_n|)$ est majorée, la suite (u_n) est bornée.
2. Si une suite $(|u_n|)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge vers 0.
3. Si une suite (u_n) converge vers ℓ et si elle est a termes strictement positif, alors $\ell > 0$.
4. Si une suite (u_n) converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 quelque soit la suite (v_n).
5. Si $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont deux suites convergentes, la suite $(|u_n+v_n|)$ est aussi convergente.
6. Si la suite $(|u_n+v_n|)$ est convergente alors les deux suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont aussi convergentes.
7. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \le v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n).
8. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \le v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n).
9. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \ge v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n).
10. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \ge v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n).

11. Si une suite (u_n) converge, alors elle est monotone.
12. Si une suite (u_n) est monotone, alors elle converge.
13. Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
14. Si une suite (u_n) est croissante et minorée, alors elle converge.
15. Si une suite (u_n) est décroissante et majorée, alors elle converge.
16. Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

Exercice 5.18 (Suite récurrente)

Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

b) $1 \le u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

d) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$

e) $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$

f) $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$

g) $u_0 > \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - \dfrac{3}{4}$

h) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

i) $u_0 > \frac{15}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - \dfrac{15}{4}$

j) $u_0 \ge 2$ et $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{2 + u_n}$

k) $u_0 \in]1;4[$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$

l) $u_0 > 4$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$

Exercice 5.19 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a + 1 + u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 5.20

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \dots}}}}.$$

Lequel et que vaut b ?

Exercice 5.21 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est à dire telle que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_n(v_n - u_n) = 0$. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que les deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 5.22 (Moyenne arithmético-harmonique)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bien définies puis que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > b_n.$$

2. Vérifier que la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. En supposant qu'elle existe, calculer la limite commune au deux suites.
4. Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 5.23 (Moyenne géometrico-harmonique)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite (appelée *moyenne géométrico-harmonique* de a_0 et b_0).

Calcul de logarithmes et moyenne arithmético-géométrique Lorsque l'on désire calculer un sinus, un logarithme, une exponentielle, etc., avec une précision allant de quelques dizaines à quelques milliers de chiffres, la solution la plus couramment retenue consiste à approcher la fonction désirée par un polynôme. Pour obtenir de bien plus grandes précisions à un coût raisonnable, on utilise la moyenne arithmético-géométrique de GAUSS-LEGENDRE. Si on part de deux valeurs a_0 et b_0, et que l'on construit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, les deux suites convergent très vite (c'est-à-dire s'approchent très vite). Notons $\ell(a_0, b_0)$ cette limite. La table ci-dessous donne les premières étapes du calcul de $\ell(1,2)$:

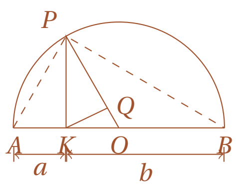
i	a_i	b_i
0	1	2
1	1.5	1.4142135623730
2	1.4571067811865	1.4564753152197
3	1.4567910481542	1.4567910139395
4	1.4567910310469	1.4567910310469

En utilisant (pour un x grand) la relation

$$\frac{\pi}{2\ell(1,4/x)} = \log(x) + \frac{4\log(x)-4}{x^2} + \frac{36\log(x)-42}{x^4} + \cdots$$

on se ramène au calcul d'une moyenne arithmético-géométrique bien choisie pour calculer des logarithmes avec une très grande précision.
Source : Vincent LEFÈVRE et Jean-Michel MULLER, «Erreurs en arithmétique des ordinateurs» — Images des Mathématiques, CNRS, 2009. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Erreurs-en-arithmetique-des.html`

Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique : interprétation géométrique Soient a et b les longueurs des deux segments contigus, et considérons le demi-cercle dont le diamètre est l'union de ces deux segments. Construisons la perpendiculaire au point K (où les deux segments se rencontrent), et soit P le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le demi-cercle. Soit O le centre du demi-cercle et soit Q le pied de la perpendiculaire au rayon OP passant par K.



On a $\overline{PQ} < \overline{PK} < \overline{PO}$ et en utilisant les théorèmes sur les triangles rectangles on trouve

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{\text{Moyenne harmonique}} < \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{Moyenne géométrique}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{Moyenne arithmetique}}$$

Exercice 5.24

Donner l'exemple

1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;

3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 5.25

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants

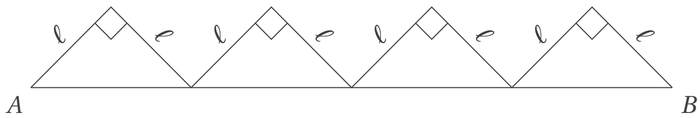
$$(1)\quad u_n := (-1)^n, \qquad (2)\quad u_n := \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}, \qquad (3)\quad u_n := \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 5.26

Considérons un polygone régulier à n cotés inscrit dans un disque de rayon r. Montrer que son périmètre tend vers la longueurs du cercle lorsque n tend vers $+\infty$.

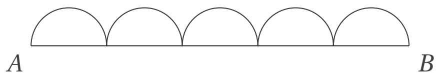
Exercice 5.27

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme en figure. On obtient une ligne de segments de longueur $L = 2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Exercice 5.28

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un demi-cercle comme en figure. On obtient une ligne de longueur L. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



6
Limites et continuité

Exercice 6.1
Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 6.2
En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g m·s^{-2}. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Exercice 6.3
La force d'attraction entre deux masses est donnée par la loi de NEWTON $F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ où F est la force d'attraction (en newtons), $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ est une constante universelle, r est la distance (en mètres) entre les masses et m_1 et $_2$ sont les masses. Soit la masse de la Terre 6×10^{24} kg et celle, approximative, d'un satellite 10^4 kg. À partir de quelle distance la force exercée par la Terre sur le satellite est-elle inférieure à 10 N ? Et inférieure à $\varepsilon > 0$ N ? Que vaut la limite $\lim_{r\to+\infty} F(t)$?

Exercice 6.4
Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 6.5 (F.I.)
Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin(x)}{\ln(x)}$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x-\cos(x)}{x}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)}$,

m) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{4x-12}$.

Exercice 6.6
Compléter le tableau suivant :

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$				
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$				
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$				

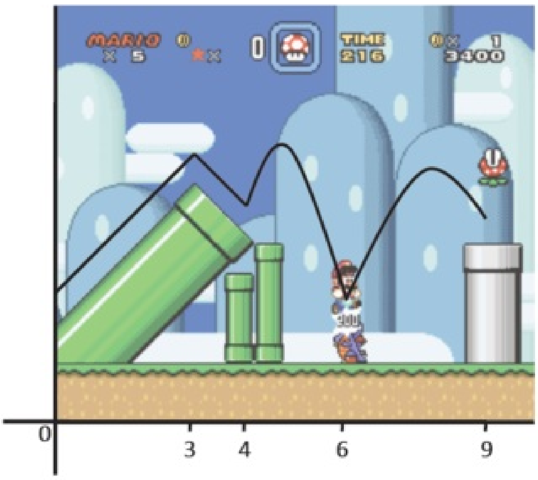
Exercice 6.7
Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

$$f(x):=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x):=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}.$$

Exercice 6.8
Au niveau 1 de `Super Mario World`, Mario court et saute vers la droite. Notons x sa position horizontale. Sa hauteur h est décrite en fonction de x par la fonction définie par morceaux suivante :

$$h(x)=\begin{cases} x+3, & \text{si } 0\le x<3,\\ 9-x, & \text{si } 3\le x<4,\\ -4x^2+39x-87, & \text{si } 4\le x<6,\\ -x^2+16x-57, & \text{si } 6\le x\le 9.\end{cases}$$

Montrer que le parcours de Mario est continu sur l'intervalle $[0;9]$. Autrement dit, vérifier que la fonction h est continue en $x=3$, $x=4$ et $x=6$.



Exercice 6.9 (Discontinuité de première espèce)
Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x):=\frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6.10 (Discontinuité de seconde espèce)
Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x):=\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6.11 (Fonction prolongeable par continuité)
Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x):=x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6.12
Étudier, en fonction des deux entiers positif n et m, si f est prolongeable en 0

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Exercice 6.13
Soient $E := [-2,-1[\cup\{0\}\cup]+1,+2]$ et $F := [-1,+1]$. Soit f l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E \qquad f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-2,-1[,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ x-1 & \text{si } x \in]+1,+2].\end{cases}$$

Montrer que f est bijective et continue en tout point de E mais qu'il existe un point de F en lequel f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 6.14
Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0,\\ 1 & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Exercice 6.15
Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

Exercice 6.16
1. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0,\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}\end{aligned}$$

   Établir si f est continue.
2. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0,\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}\end{aligned}$$

   Établir si f est continue.
3. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} -x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0,\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}\end{aligned}$$

   Établir si f est continue.
4. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}.\end{aligned}$$

   4.1. Montrer que f est continue.

   4.2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   4.3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = x-1-\ln|x|.\end{aligned}$$

   5.1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$.

   5.2. Établir si f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6.17
Établir si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0.

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x<0,\end{cases}$$

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x>0,\\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0,\end{cases}$$

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x<0,\end{cases}$$

Exercice 6.18
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x\ln|x|}{x-1} & \text{si } x\notin\{0,1\},\\ 1 & \text{si } x=1,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Est-elle continue ?

Exercice 6.19
1. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Exercice 6.20 (Application du théorème de la bijection)
Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-2+\ln(x)$.
1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique qu'on notera a.
2. Soit g la bijection réciproque de f. Étudier monotonie et continuité de g en précisant son comportement aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Exercice 6.21
Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a)<g(a)$ et $f(b)>g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0\in]a,b[$ tel que $f(x_0)=g(x_0)$.

Exercice 6.22
Soit f une fonction continue et injective de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

Exercice 6.23
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha\in[0,1]$ tel que $f(\alpha)=\alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Exercice 6.24
Considérons l'équation $x(1+e^x)=e^x$. Montrer qu'elle admet une unique solution réelle ℓ dans $[0;1]$.

Exercice 6.25 (Application du théorème des valeurs intermédiaires)
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^{35}+x-10^{-35}$. Montrer qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ satisfaisant à $f(x)=0$ et $0<x<\frac{1}{10}$.

Exercice 6.26 (Application du théorème des valeurs intermédiaires)
Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

Exercice 6.27
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x)=x^2-16$, $I=]0,+\infty[$,

b) $f(x)=x^2-160$, $I=]-\infty,0[$,

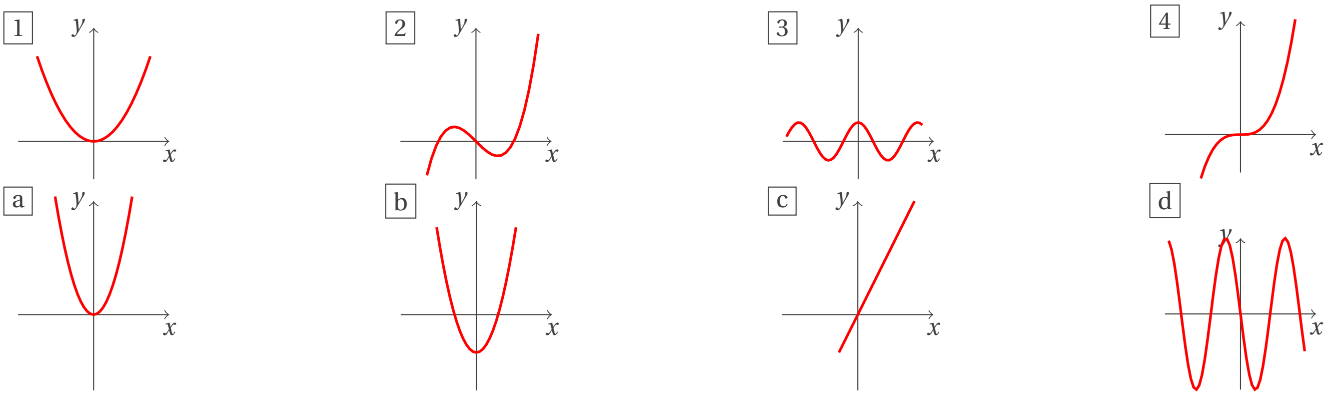
c) $f(x)=x^2-\sqrt{2}$, $I=]-\infty,0[$,

d) $f(x)=x^3-\sqrt{\pi}$, $I=]0,+\infty[$.

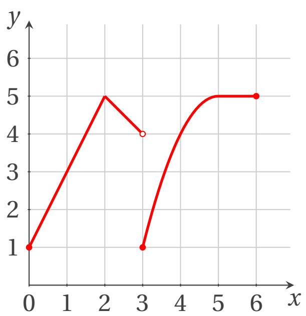
Exercice 6.28
Montrer qu'il existe $x\in]0,1[$ tel que $\arctan(x)=\pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

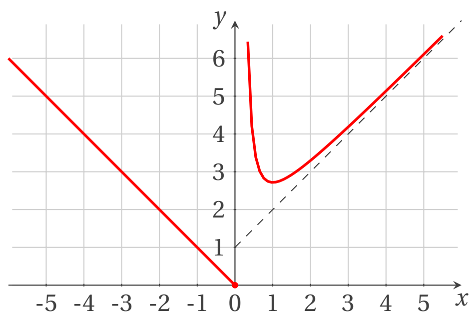
7
Dérivabilité

Exercice 7.1
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Exercice 7.2
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.





Exercice 7.3
Calculer les dérivées des fonctions :

a) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	b) $f(t) = 4t^3 + 2t - 1$	c) $H(z) = \sin(z)\cos(z)$	d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$
e) $g(t) = t^3 \sin(t)$	f) $T(r) = r^2 \tan(r)$	g) $G(v) = 5v^2$	h) $R(\omega) = \dfrac{\cos(\omega)}{1-\sin(\omega)}$
i) $\sin(x)\cos(x)$	j) $\cos(-2x+1)$	k) $\frac{x}{\sin(2x)}$	l) $\ln(x^2+1)$
m) e^{x^2-3}	n) $\frac{4x}{\cos(x)}$	o) $2xe^{\cos(x)}$	p) $\sqrt{\cos(x)+2}$
q) $\sin(2x+1)$	r) $x\cos(5x)$	s) $\left(1-\frac{x}{7}\right)^7$	t) $\sin(x^2)$
u) $(3x+2)^9$	v) $\sin\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$	w) $\frac{1}{(2x+1)^4}$	x) $\sin(2x)\cos(7x)$

Exercice 7.4
Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Exercice 7.5 (Tangentes)

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b.
5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x = a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x = 1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x = 1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$ si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$?

Exercice 7.6

On considère une fonction exponentielle $f : x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* qu'importe la valeur choisie pour c.

Exercice 7.7

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de Van der Waals qui s'écrit $P(V) = nRT/(V - nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Exercice 7.8

Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Exercice 7.9

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de 200 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?

Exercice 7.10

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de 100 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après 10 s ?

Exercice 7.11

Une masse tombe avec une accélération constante a. Comment évolue sa vitesse ?

Exercice 7.12

Quelle accélération constante (en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de $0\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ à une vitesse de $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ en 10 s ?

Exercice 7.13

Une ligne de téléphone relie deux pylônes distants de 14 m. Les sommets des pylônes se trouvent aux points $(-7,0)$ et $(7,0)$. La ligne décrit une courbe d'équation $y = 8(\cosh(x/7) - \cosh(1)$. Trouver l'angle entre le pylône et la tangente à la ligne au point d'attache.

Exercice 7.14 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ (2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$ (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+x}{x^2-x}$ (4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$

(5) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2-9}$ (6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-x}$ (7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$ (8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$ (10) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^3-3x^2+4}$ (11) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$ (12) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

(13) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$ (14) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}$ (15) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x}$ (16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$

(17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}$ (18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x^2}$ (19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{3x^2}$ (20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^x-3}{4x}$

(21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2e^x}{x}$ (22) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ (23) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$ (24) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{\ln(x)}$

(25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(x)}{x}$ (26) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x^2}$ (27) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x^3}$ (28) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$

(29) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos(x)}{x-\pi}$ (30) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x+\sin(x)}$ (31) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ (32) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos-(x)}{x^3}$

(33) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(x)}{x^3}$ (34) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$ (35) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^2}$ (36) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$

(37) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(kx)}{x}$ (38) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(kx)}{x}$ (39) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ (40) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$

(41) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$ (42) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}$ (43) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$ (44) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

Exercice 7.15 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+3}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x+1}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{2x+1}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2}{5x-3}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{3x^3+x^2}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{2x+3}$ (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^4+2x^2+1}$ (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^4}$ (10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$ (11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ (12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{e^x}$ (14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^4}$ (15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{x^2}$ (16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ (18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ (19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x}$ (20) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

(21) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln(x^2)}$

Exercice 7.16 (Théorème de l'Hôpital)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'Hôpital pour les calculer ?

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}$, (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{x}$, (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{x}$, (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}$,

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$, (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x)}$, (7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{x}$, (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Exercice 7.17 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{1/x}$ (6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$ (7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Exercice 7.18 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[\infty-\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos(x)}-\tan(x)\right)$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{2\ln(x)}\right)$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

Exercice 7.19

Calculer les limites suivantes.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$, (2) $\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x-1}$, (3) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$, (4) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$, (6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$, (8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,

(9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Exercice 7.20

Montrer que la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(x^2-3x+2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1<\ell_2$ de f et les calculer.

Exercice 7.21

Considérons la fonction $f\colon[-\frac{\pi}{2};\pi]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{2}-\sin(x)+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^-<0$ et $\ell^+>0$ de l'équation $f(x)=0$ pour $x\in[-\frac{\pi}{2};\pi]$.

Exercice 7.22

Soit la fonction $f_\gamma(x)=\cosh(x)+\cos(x)-\gamma$. Pour $\gamma=1,2,3$ trouver (graphiquement) un intervalle qui contient le zéro de f_γ.

Exercice 7.23 (Application du théorème des accroissements finis)

Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km·h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 7.24

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

☐ 1. $f(x)=|x|+1$

☐ 2. $f(x)=e^x-x$

☐ 3. $f(x)=\frac{x^2+1}{|x|+1}$

☐ 4. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

☐ 5. $f(x)=\ln(x^2+1)$

Exercice 7.25

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-b\}$ telle que $f(x)=\dfrac{ax^2-4}{x+b}$. On note $\mathscr{G}$ la courbe représentative de f.

☐ 1. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en $x=-b$.

☐ 2. Si $b=-2/\sqrt{a}$ et $a>0$ alors f est prolongeable par continuité en $x=-b$.

☐ 3. Si $b=2/\sqrt{a}$ et $a>0$ alors f est prolongeable par continuité en $x=-b$.

☐ 4. $\mathscr{G}$ admet une asymptote verticale pour tout a et b.

☐ 5. Il existe au moins une valeur de a telle que $\mathscr{G}$ admet une asymptote horizontale.

☐ 6. Il existe au moins une valeur de $a \neq 0$ telle que $\mathscr{G}$ admet une asymptote oblique.

☐ 7. Soit $a = b = 1$, alors $\mathscr{G}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

☐ 8. Soit $a = -1$ et $b = 1$, alors $\mathscr{G}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7.26

Soit $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, répondre aux questions suivantes :

- ⋆ f_α est-elle continue en $x = 0$?
- ⋆ f_α est-elle dérivable en $x = 0$?
- ⋆ f_α est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7.27

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 7.28

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7.29

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7.30

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=\frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$?
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7.31

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x=0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7.32

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x=0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7.33

Dans chaque question, on définira une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,
b) f est surjective et non injective,
c) f est bijective et non continue au point 1,
d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,
e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,
f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' est non continue au point 0,
g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 7.34

Soit $h\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème de Rolle ?

Exercice 7.35

Soit $h\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Exercice 7.36

Soit $g\colon]0;\frac{\pi}{2}[\to]0,1[$ une application telle que $g(x)=\sin(x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]0;1[$.

Exercice 7.37

Soit $g\colon]-\infty,0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x)=e^x-1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=-\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1;0[$.

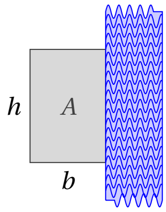
Exercice 7.38

Soit $g\colon]-1,0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x)=\ln(1+x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]-1,0[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=-2$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-\infty;0[$.

Exercice 7.39

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?

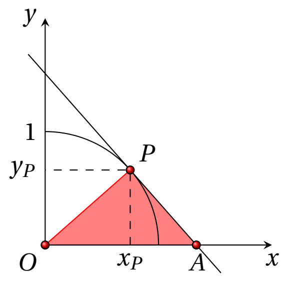


Exercice 7.40

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4,0)$.

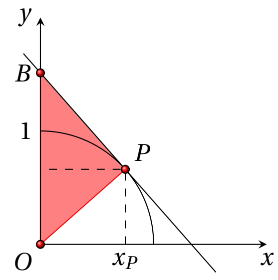
Exercice 7.41

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x. Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P.



Exercice 7.42

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Exercice 7.43 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

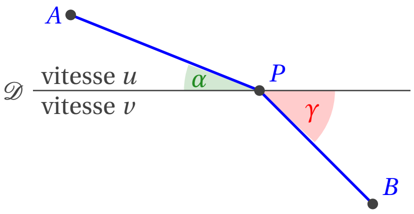
Exercice 7.44 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Exercice 7.45

D'après le principe de Fermat un rayon lumineux n'emprunte pas le chemin le plus court mais le chemin le plus rapide. Autrement dit, ce n'est pas la longueur du parcours mais sa durée qui est minimale.

1. Démontrer la loi de la réfraction : "dans le plan soient A et B deux points de chaque côté d'une droite $\mathscr{D}$. On suppose que la lumière voyage à vitesse u dans le demi plan contenant A et à vitesse v dans l'autre demi-plan. Alors le rayon lumineux prend le chemin caractérisé par l'équation $u\cos(\gamma) = v\cos(\alpha)$ où α et γ sont les angles indiqués ci-dessous."



(Indication : choisir un repère adapté et exprimer le temps nécessaire pour le chemin en fonction de la position du point P ; puis minimiser par un calcul de dérivée.)

2. Pour un rayon lumineux qui arrive sur la surface d'un lac un nageur mesure $\alpha = 45°$ et $\gamma = 58°$. En déduire la vitesse de la lumière dans l'eau.

Exercice 7.46

Un alpiniste commence à escalader une montagne un samedi à 7 heures du matin. À 5 heures de l'après-midi, il atteint le sommet, où il décide de passer la nuit. Le dimanche matin à 7 heures, il entame sa descente. Il arrive à son point de départ à 17 heures. On suppose que son altitude varie continument au cours du temps. Prouver qu'à un même moment de la journée du samedi et celle du dimanche, il était à la même altitude.

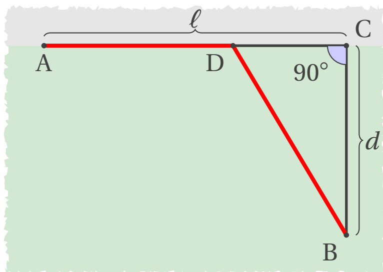
Exercice 7.47

On considère un produit dont le prix unitaire est p ($p > 0$). On note q la quantité vendue de ce produit pendant un mois et on suppose que $q(p) = \alpha + \beta p$ où α et β sont des réels.

1. Peut-on déjà prédire le signe de la constante β ?
2. De combien varie la quantité vendue lorsque le prix augmente de 1 ?
3. Quelle est la plus grande valeur de p possible sachant que la quantité vendue q est un nombre positif ?
4. On suppose désormais que $q = 5000$ si $p = 100$, et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β.
5. Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
6. Quelle est la valeur maximale des recettes ?
7. Le coût unitaire de fabrication du produit est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $g(p)$ total réalisé (c'est-à-dire la différence entre recettes et coût).
8. Pour quelle quantité le profit est-il maximal ?

Exercice 7.48

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connait les distances $AC = \ell$ et $CB = d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.



Exercice 7.49

On note x la quantité produite, p le prix et $f(x)$ le coût. On suppose que l'on se trouve dans un cas de concurrence parfaite, dans lequel le prix de la marchandise est indépendant de la quantité produite. Le profit est la fonction $\Pi(x) = \text{recette} - \text{coût}$. Prouver que le profit est optimal lorsque la recette marginale est égal au coût marginal.

Exercice 7.50

On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Exercice 7.51

Un joueur de football, en possession du ballon, court sur la ligne de touche. Ayant une frappe extrêmement forte il ne se soucie pas de la distance et tire à l'endroit où l'angle d'ouverture par rapport au but est maximal. Quel est alors cet angle (en degrés) ?
Utiliser les dimensions recommandées par la FIFA : terrain 105 m × 68 m et largeur du but 7.32 m.

Exercice 7.52
Deux rues se coupent en formant un angle droit. Une voiture circule sur une rue à une vitesse de $2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et une seconde voiture circule sur l'autre rue à une vitesse de $4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Les voitures partent toutes les deux d'une distance de 200 m du point d'intersection et se dirigent vers l'intersection des rues. Quelle sera leur distance minimale ?

Exercice 7.53
La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive proportionnelle à $1/r^6$ et une force répulsive proportionnelle à $1/r^{12}$. La distance d'équilibre est celle pour laquelle le potentiel de LENNARD-JONES est minimal. Calculer cette distance sachant que ce potentiel est donné par

$$V(r) = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

où σ est une distance, appelée distance de collision, et ε est le potentiel minimal.

Exercice 7.54
Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha-\beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Exercice 7.55
La mesure de la distance entre deux points donne une série de valeurs expérimentales $d_1, d_2, \dots, d_n$. Sur la base de ces valeurs, on désire obtenir une estimation de d qui soit la plus proche possible de la réalité. Trouver une formule pour d telle que la mesure d'erreur

$$(d - d_1)^2 + (d - d_2)^2 + \cdots + (d - d_1)^n$$

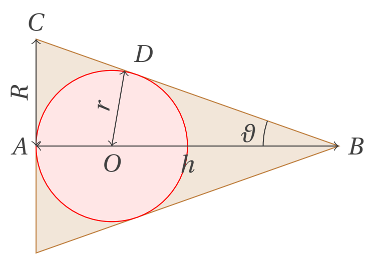
soit minimale.

Exercice 7.56
Une société produit des boîtes en carton de 5 L en forme de parallélépipède à base carrée. Les boîtes doivent utiliser la moindre quantité de carton possible. Quelles dimensions doit-elle fixer ?

Exercice 7.57
Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 7.58
Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 7.59 (Cônes de glace)
On veut insérer entièrement une sphère de glace dans un cône de biscuit de sorte à ce que le cône soit le plus remplis possible. Ceci revient à minimiser le rapport entre le volume du cône et le volume de la sphère.



- ⋆ Exprimer la hauteur h et le rayon R du cône en fonction de $r > 0$ le rayon de la sphère et de $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ l'angle du cône.
- ⋆ Trouver la valeur de ϑ qui minimise le rapport $\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}$.

⋆ Calculer la hauteur h et le rayon R optimales du cône en fonction du rayon de la sphère r.

Exercice 7.60

On considère l'équation

$$\cos(x) = \frac{2}{3}x.$$

1. Montrer que si x est solution de l'équation alors $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une approximation de cette solution à 10^{-1} près.

8

Plan d'étude d'une fonction numérique

Exercice 8.1

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Exercice 8.2

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Exercice 8.3

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Exercice 8.4

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x - x^5) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes

3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. graphe

Exercice 8.5

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. graphe

Exercice 8.6

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Exercice 8.7

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2+2x-2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Exercice 8.8

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}.$$

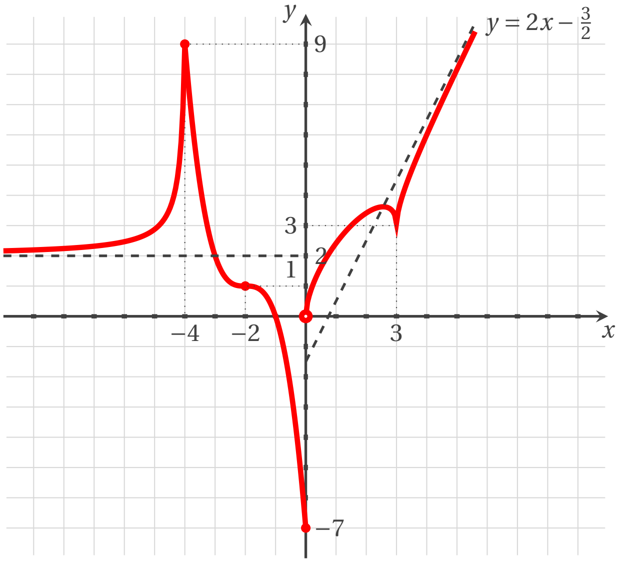
1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Préciser les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et étudier son signe.
5. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Exercice 8.9

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x-27} & \text{si } x \le -4, \\ 1-(x+2)^3 & \text{si } -4 < x \le 0, \\ x + \sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 8.10

Considérons la fonction $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x^2 - 2x}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition A.
2. Trouver le signe de f.
3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x \to \pm\infty$.
4. Trouver la dérivée de f et où f est croissante ou décroissante.
5. Dessiner le graphe de f.

Exercice 8.11

Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

en détaillant

1. son domaine et son signe,
2. les limites pour $x \to \pm\infty$ et aux bornes du domaine de définition,
3. étudier la dérivée de f.

9 Primitives et Intégrales

Primitives

Exercice 9.1 (Par intégration directe ou par transformations élémentaires)

Calculer les primitives suivantes :

(1) $\displaystyle\int 2x^3-3x+1\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ (7) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int x\sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (11) $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (12) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (14) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$ (15) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x$ (16) $\displaystyle\int \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ (18) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (19) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ (20) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(21) $\displaystyle\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ (22) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ (23) $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (24) $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$ (26) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (27) $\displaystyle\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x$ avec $a\neq 0$ et $n\neq 1$ (28) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$ avec $ax+b\neq 0$, $a\neq 0$ et $n>1$

(29) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (30) $\displaystyle\int (1+2x^3)^2\,\mathrm{d}x$ (31) $\displaystyle\int (1+\cos(x))^2\,\mathrm{d}x$ (32) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(33) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (34) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ (35) $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ (36) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(4x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.2 (Intégration par changement de variable)

Calculer les primitives suivantes :

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ (7) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))}\,\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (11) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$ (12) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (14) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ (15) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (16) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int x\sqrt{a+x^2}\,\mathrm{d}x$ (18) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,\mathrm{d}x$ (19) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (20) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

(21) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ (22) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ (23) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ (24) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ (26) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.3 (Intégration par parties)

Calculer les primitives suivantes :

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ (7) $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$ (11) $\displaystyle\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (12) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ (14) $\displaystyle\int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$ (15) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ (16) $\displaystyle\int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.4 ((P. Halmos))

Si $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que **la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées**, autrement dit $(fg)'\neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)'=f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Exercice 9.5 (Formules de réduction)

Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$, montrer que
$$\int x^ne^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\left(x^n-\frac{n}{\alpha}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots+(-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}+c$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$\int x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x=-x^n\cos(x)+nx^{n-1}\sin(x)-n(n-1)\int x^{n-2}\sin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x=x^n\sin(x)+nx^{n-1}\cos(x)-n(n-1)\int x^{n-2}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\neq-1$ et $x>0$. Montrer que
$$\int x^\alpha\ln^n(x)\,\mathrm{d}x=\left(\ln^n(x)-\frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x)+\frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots+(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c.$$

Exercice 9.6 (Intégration de fonctions rationnelles)

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{a}{x-b}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}x,\ n\neq 1$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}\,\mathrm{d}x$

Intégrales

Exercice 9.7
La valeur moyenne de la fonction $f(x)=x^3$ sur l'intervalle $[0;k]$ est 9. Calculer k.

Exercice 9.8 (Vitesse et accélération)
Soit $V>0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $v(t)=Vt(1-t)$ km·h^{-1} durant l'intervalle de temps $0\le t\le 1$ h. Quelle a été sa vitesse maximale ? Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Exercice 9.9
Calculer

$$\mathscr{A}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathscr{B}=\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathscr{C}=\int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9.10 (Calcul de l'aire)
Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

a) $f(x)=-x^2+x+2$ et $g(x)=x^2-3x+2$

b) $f(x)=\frac{x^3}{4}$ et $g(x)=x^2-x$

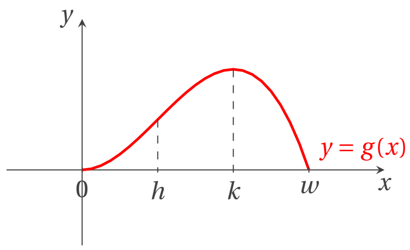
Exercice 9.11 (Calcul de l'aire)
Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\le x\le 2\pi,\ \frac{1}{8}\le y\le\cos^3 x\right\},\qquad B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -\pi\le x\le \pi,\ \frac{1}{8}\le y\le\cos^3 x\right\}.$$

Exercice 9.12
Dans la figure ci-contre on a tracé le graphe de la fonction $g\colon [0;w]\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec $f\colon[0;w]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Le graphe de g a tangente horizontale en $x=0$ et présente un changement de concavité en $x=h$ et un maximum en $x=k$.



1. Calculer $f(0)$ et $f(k)$.
2. Tracer un graphe plausible de f et montrer qu'elle admet un maximum.
3. Dorénavant on suppose que g est une fonction polynomiale de degré 3.
   3.1. Montrer que $h=w/3$ et $k=2h$.
   3.2. Pour $w=3$ et $g(1)=2/3$ trouver l'expression de g.

Exercice 9.13 (Calcul d'impôt)
Le principe de l'impôt sur les revenus est le suivant : le revenu imposable[1] pour l'année 2013 est partagé en tranches et l'impôt à payer en 2014 est calculé en prenant un certain pourcentage de chaque tranche. Voici alors les tranches d'imposition selon les données officielles prises sur le site du ministère des finances :

1. Il s'agit du revenu du contribuable auquel on retire certaines sommes (par exemple au titre des frais professionnels).

- jusqu'à 6011 € : 0%
- de 6011 € à 11 991 € : 5.5%
- de 11 991 € à 26 631 € : 14%
- de 26 631 € à 71 397 € : 30%
- de 71 397 € à 151 200 € : 41%
- plus de 151 200 € : 45%

Mathématiquement parlant, l'impôt est une *fonction continue* du revenu pour qu'il n'y ait pas d'injustices : une petite modification du revenu n'entraîne qu'une petite modification de l'impôt (sauter d'une tranche n'est pas un drame). Avec des taux marginaux par tranches, on obtient une fonction *croissante* (plus le revenu est élevé et plus l'impôt est élevé) et affine par morceaux ; et puisque le taux marginal augmente en fonction du revenu il s'agit d'une fonction *convexe*. Cela signifie que la courbe «monte toujours plus vite» : plus le revenu est élevé et plus le taux marginal augmente. Non seulement l'impôt augmente en fonction du revenu mais il augmente de plus en plus vite.

Écrire et tracer le graphe des fonctions suivantes en fonction du revenu imposable :

1. Taux marginal,
2. Impôt,
3. Taux global,
4. Ce qui reste après avoir payé l'impôt.

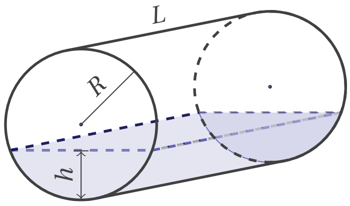
Exercice 9.14 (Probabilité géométrique)

1. On sélectionne un point au hasard sur une cible *circulaire*. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus prêt du centre que de la circonférence de la cible ?
2. On sélectionne un point au hasard sur une cible *carrée*. Quelle est la probabilité que le point sélectionné soit plus prêt du centre du carré que d'un de ses côtés ?

Source : `http://www.thedudeminds.net`

Exercice 9.15 (Problème pratique)

J'ai acheté une ancienne maison qui utilise du mazout pour le chauffage. Le constructeur avait enterré une cuve cylindrique dont je ne connais pas la capacité, je peux juste mesurer la hauteur du mazout dans la cuve et le rayon qui est de 0.80 m. Sachant qu'au départ la hauteur du mazout dans la cuve est de 0.36 m et qu'après avoir ajouté 3000 L la hauteur est de 1.35 m, je veux calculer le volume totale de la cuve et tracer la fonction qui renvoie les litres que je peux ajouter en fonction de la hauteur de mazout présent dans la cuve.



Exercice 9.16 (Un escargot sur un élastique)

Un escargot avance d'un mètre par jour sur un élastique d'un kilomètre de long. Mais l'élastique s'étire d'un kilomètre par jour. L'escargot arrivera-t-elle au bout de l'élastique ?

Source : `http://allken-bernard.org/pierre/weblog/?p=209`

10 Équations différentielles ordinaires (EDO)

EDO d'ordre 1 à variables séparables

Exercice 10.1
Résoudre le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 10.2
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 4xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 10.3
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ty^2(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

en fonction de la donnée initiale y_0.

Exercice 10.4 (Datation au carbone 14)
Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. À la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On note $n(t) > 0$ le nombre d'atomes au temps t, exprimé en années, après la mort de l'organisme. Ce mécanisme se traduit par l'équation

$$n'(t) = -kn(t)$$

où k est une constante positive.

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.
2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort, calculer k.
3. Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

Exercice 10.5 («Les experts - Toulon»)
Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°C. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20°C et si la température externe est de -5°C ?
Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Exercice 10.6 («Un gâteau presque parfait»)

Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100°C). Après 10 minutes sa température est de 80°C et de 65°C à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.
Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Exercice 10.7

Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de 1g/l à l'instant $t = 0$ interagissent et produisent une substance dont la concentration est notée $y(t)$ à l'instant $t \ge 0$. On suppose que $y(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \qquad \text{pour tout } t \ge 0.$$

1. Montrer que toute solution de l'EDO est une fonction croissante.
2. Chercher les solutions constantes de l'EDO.
3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que l'on a $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$. (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas et on pourra s'aider d'un dessin.)
4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$ existe. Puis, en admettant que $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ.
5. Calculer la solution lorsque $y(0) = 0$, lorsque $y(0) = 1$ et lorsque $y(0) = 2$. Dans chacun de ces cas établir l'intervalle maximale d'existence.

Exercice 10.8 (Logistique)

Soit k et h deux constantes positives. Calculer $p(t)$ pour $t > 0$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t) - hp^2(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

Ce modèle, qui décrit l'évolution d'une population de p individus à l'instant t, suppose que le taux de croissance du nombre d'individus n'est pas constant mais diminue si la population augment (les ressources se réduisent).

Exercice 10.9 («Urgence»)

On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \ge 0$. On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie de propage par contact). Si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$. Si la ville est isolée et compte 5 000 individus dont 160 sont malades et 1 200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Exercice 10.10

On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (t est exprimé en années et $y(t)$ en millions de ménages). Le modèle de VARHULST estime que sur la période 1980 – 2020, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

1. Calculer toutes les solutions de l'équation différentielle.
2. On pose $t = 0$ en 1980 et on sait que $y(0) = 0,01$. Combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 ?

Exercice 10.11 (Modèle de GOMPERTZ)

Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement ; son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de GOMPERTZ suivant :

$$y'(t) = -y(t)\ln(y(t)).$$

Calculer toute les solutions de cette équation différentielle pour $t > 0$ (ne pas oublier les solutions constantes). La population va-t-elle survivre ?

EDO d'ordre 1 linéaire

Exercice 10.12
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (3x^2+1)\,y(x) = x^2 e^{-x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10.13
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (3x^2-1)\,y(x) = x^2 e^{x}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Exercice 10.14
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{x-1}\,y(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10.15
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (4x^3+5)\,y(x) = x^3 e^{-5x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10.16
Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2y(x) + e^{-2x}$ qui ont dérivée nulle en $x = 0$.

Exercice 10.17
Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2xy(x) + x$.

Exercice 10.18
Résoudre l'équation différentielle

$$(x+1)\,y'(x) + y(x) = (x+1)\sin(x)$$

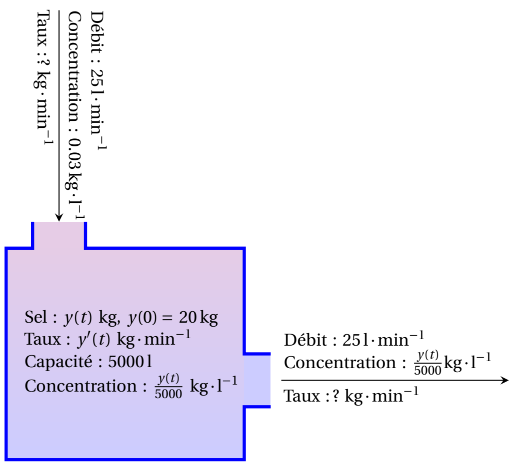
sur des intervalles à préciser.

Exercice 10.19
Dans un circuit électrique de type résistance-inductance, le courant I évolue avec le temps selon

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{V}{L}$$

où R, L et V sont des constantes associées aux composantes électriques. Résolvez l'équation différentielle. La solution I tend-elle vers une limite finie ?

Exercice 10.20
On considère un réservoir de capacité 5000 l rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de $25\,\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. La solution est maintenue bien mélangés. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t, $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, *i.e.* la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.



1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy

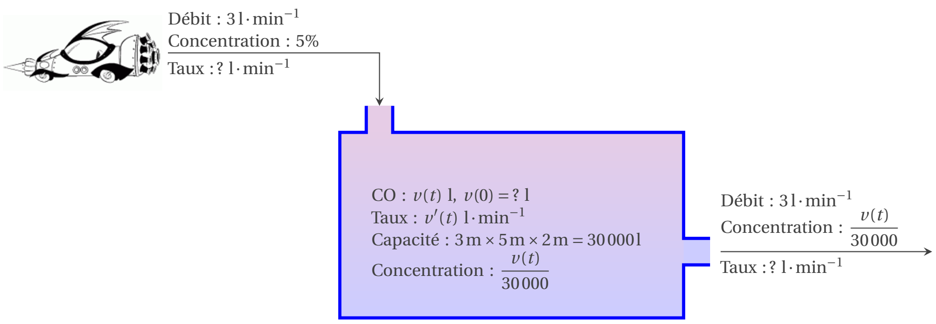
$$\begin{cases} y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}, \\ y(0) = 20. \end{cases}$$

2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure ?

Exercice 10.21

L'air d'un garage de $3\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ est initialement chargée de 0.001% de monoxyde de carbone (CO). À l'instant $t = 0$, on fait tourner un moteur et des fumées toxiques contenant 5% de CO se dégagent de la pièce à raison de 3 litres par minute. Heureusement, l'air de la pièce est éliminée à la même vitesse de $3\,\mathrm{l} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. On note $v(t)$ le volume de CO présent dans la pièce au temps t.

1. En supposant que le mélange se fait instantanément, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10000}, \\ v(0) = 0.3. \end{cases}$$
2. Déterminer le volume $v(t)$ de CO présent dans la pièce au temps t. Calculer vers quelle valeur limite $v(t)$ tend lorsque t tend vers l'infini.
3. Le seuil critique pour la santé est de 0.015% de CO. Après combien de temps ce taux est-il atteint ?



Exercice 10.22

Trouver la solution des problèmes de CAUCHY suivants :

(1) $\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 0, \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t), \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Exercice 10.23

Déterminer la solution générale de l'EDO $3y'(t) + 12y(t) = 4$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Exercice 10.24

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t) + y(t) = e^{3t}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Exercice 10.25

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t) + \tan(t)y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Exercice 10.26

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t) + \dfrac{t+2}{t}y(t) = \dfrac{e^t}{t^2}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Exercice 10.27

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t) + y(t) = \dfrac{1-e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Exercice 10.28

Déterminer la solution générale de l'EDO $ty'(t) + (3t+1)y(t) = e^{-3t}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Exercice 10.29

Déterminer la solution générale de l'EDO $2t(t+1)y'(t) + (t+1)y(t) = 1$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Bibliographie

[1] Guy AULIAC, Jean AVIGNANT et Elie AZOULAY : *Aide-mémoire de Mathématiques*. EdiScience, 2006.

[2] Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET : *Physique tout-en-un - 1^re^ année*. Dunod, 2008.

[3] Vivina BARUTELLO, Monica CONTI, Davide L. FERRARIO, Susanna TERRACINI et Gianmaria VERZINI : *Analisi matematica con elementi di geometria e calcolo vettoriale*, volume 2. Apogeo, 2008.

[4] Vincent BLONDEL : *Mathématiques - Analyse*. Dunod, 2000.

[5] Xavier BUFF, Josselin GARNIER, Emmanuel HALBERTSTADT, Thomas LACHAND-ROBERT, François MOULIN et Jacques SAULOY : *Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1*. Dunod, 2006.

[6] Xavier BUFF, Josselin GARNIER, Emmanuel HALBERTSTADT, François MOULIN, Monique RAMIS et Jacques SAULOY : *Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L2*. Dunod, 2007.

[7] Claudio CANUTO et Anita TABACCO : *Analisi matematica II - Teoria ed esercizi con complementi in rete*. Springer, 2008.

[8] Alexandre CASAMAYOU-BOUCAU, Pascal CHAUVIN et Guillaume CONNAN : *Programmation en Python pour les mathématiques*. Dunod, 2012.

[9] Yadolah DODGE : *Mathématiques de base pour économistes*. Springer, 2007.

[10] Daniel FREDON, Myriam MAUMY-BERTRAND et Frédéric BERTRAND : *Mathématiques Analyse en 30 fiches*. Dunod, 2009.

[11] François GUÉNARD et Patricia HUG : *QCM de Mathématiques*, volume 1. Dunod, 1993.

[12] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : *PROBLÈMES D'ANALYSE I - Nombres réels, suites et séries*. EDP Sciences, 2008.

[13] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : *PROBLÈMES D'ANALYSE II - Continuité et dérivabilité*. EDP Sciences, 2008.

[14] Jean-Pierre LECOUTRE et Philippe PILIBOSSIAN : *TD Analyse*. Dunod, 2008.

[15] François LIRET et Charlotte SCRIBOT : *Mini manuel d'Analyse*. Dunod, 2010.

[16] Jean-Marie MONIER : *Les méthodes et exercices de Mathématiques PCSI-PTSI*. Dunod, 2008.

[17] François MOULIN, Jean François RUAUD, Anne MIQUEL et Jean-Claude SIFRE : *Mathématiques tout-en-un - 1^re^ année*. Dunod, 2003.

[18] Bernard MYERS et Dominique SOUDER : *Logique et Mathématiques*. Dunod, 2009.

[19] James STEWART : *Calculus concepts and contexts*. Brooks/Cole, 2010.

[20] James STEWART : *Calculus : early transcendentals*. Brooks/Cole Pub Co, 2010.

[21] James STEWART, Lothar REDLIN et Saleem WATSON : *Precalculus Mathematics for Calculus*. Brooks/Cole, 2009.