

M11

Mathématiques

Recueil d'exercices.

La correction est disponible sur ma page web.

Gloria Faccanoni

 <http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html>

Année 2015 – 2016

Dernière mise-à-jour : Mardi 8 septembre 2015

Table des matières

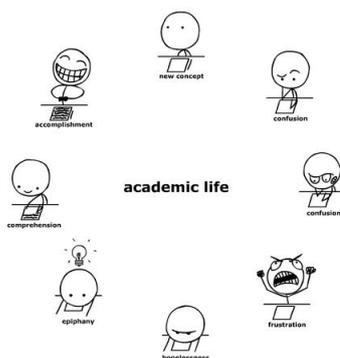
Notations	3
1 Formulaires de géométrie	5
2 Méthodologie disciplinaire	8
3 Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles	26
4 Relations, fonctions, applications	31
5 Fonctions d'une variable réelle	38
6 Suites numériques et limites	45
7 Limites et continuité	52
8 Dérivabilité	57
9 Plan d'étude d'une fonction numérique	67
10 Primitives et EDO	72

Ce cours s'adresse à des étudiants de la première année d'une Licence Scientifique. Il a pour objectif de donner les bases en calcul différentiel pour des fonctions réelles d'une variable réelle indispensables à toute formation scientifique. Les notions supposées connues correspondent au programme du lycée.

L'objet de ce aide-mémoire est de proposer une explication succincte des concepts vu en cours. De nombreux livres, parfois très fournis, existent. Ici on a cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, des acquis des étudiants au lycée et des exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages. Ce polycopié ne dispense pas des séances de cours et de TD ni de prendre des notes complémentaires. Il est d'ailleurs important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure. Ce polycopié est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement mais **ce n'est pas un livre auto-suffisant (il est loin d'être exhaustif)!** De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Malgré de très nombreuses relectures, il restera toujours des fautes, ce polycopié est donc fournit sans garanties! N'hésitez pas à me signaler les erreurs que vous remarquez.

On a inclus dans ce texte nombreux exercices corrigés. Ceux-ci, de difficulté variée, répondent à une double nécessité. Il est important de jongler avec les différents concepts introduits en cours et même de faire certaines erreurs une fois pour bien identifier les pièges. Les exercices permettent d'orienter les raisonnements vers d'autres domaines (physique, économie, etc.), cela afin d'exhiber l'intérêt et l'omniprésence du calcul différentiel. Cependant, veuillez noter que vous n'obtiendrez pas grande chose si vous vous limitez à choisir un exercice, y réfléchir une minute et aller vite voir le début de la correction en passant tout le temps à essayer de comprendre la correction qui va paraître incompréhensible. Pour que la méthode d'étude soit vraiment efficace, il faut d'abord vraiment essayer de chercher la solution. En particulier, il faut avoir un papier brouillon à coté de soi et un crayon. La première étape consiste alors à traduire l'énoncé (pas le recopier), en particulier s'il est constitué de beaucoup de jargon mathématique. Ensuite il faut essayer de rapprocher les hypothèses de la conclusion souhaitée, et pour cela faire quelques calculs ou transformer les hypothèses pour appliquer un théorème dont on aura vérifié que les hypothèses sont bien satisfaites. C'est ici que l'intuition joue un grand rôle et il ne faut pas hésiter à remplir des pages pour s'apercevoir que l'idée qu'on a eu n'est pas la bonne. Elle pourra toujours resservir dans une autre situation. Quand finalement on pense tenir le bon bout, il faut rédiger soigneusement en s'interrogeant à chaque pas sur la validité (logique, mathématique) de ce qu'on a écrit. Si l'étape précédente ne donne rien, il faut chercher de l'aide (voir le début de la correction, en parler à un autre étudiant, interroger les tuteurs).

M11		
CM	30h	20 séances de 1h30
TD	45h	30 séances de 1h30



Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
 Université de Toulon
 Avenue de l'université
 83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
 🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

Notations

Ensembles usuels en mathématiques

On désigne généralement les ensemble les plus usuels par une lettre à double barre :

\mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels

\mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs

\mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls)

\mathbb{Z}^* l'ensemble des entiers non nuls

\mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels ($\frac{p}{q}$ tel que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$)

\mathbb{R} l'ensemble des réels

\mathbb{R}^* l'ensemble des réels autres que 0

\mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes

Intervalles

Inégalité(s)	Ensemble	Représentations graphique	
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$		
$a < x < b$	$]a, b[$		
$a \leq x < b$	$[a, b[$		
$a < x \leq b$	$]a, b]$		
$x \geq a$	$[a, +\infty[$		
$x > a$	$]a, +\infty[$		
$x \leq b$	$] -\infty, b]$		
$x < b$	$] -\infty, b[$		
$ x \leq a$ avec $a \geq 0$	$[-a, a]$		
$ x < a$ avec $a \geq 0$	$] -a, a[$		
$ x \geq a$ avec $a \geq 0$	$] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$		
$ x > a$ avec $a \geq 0$	$] -\infty, -a[\cup]a, +\infty[$		
$\forall x \in \mathbb{R}$	$] -\infty, +\infty[$		
$x \neq a$	$] -\infty, a[\cup]a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{a\}$		

Symboles utilisés dans le document

-  définition
-  théorème, corollaire, proposition
-  propriété(s)
-  astuce
-  attention

	remarque
	méthode, algorithme, cas particulier
	exercice de base
	exercice
	exemple
	curiosité
>	strictement supérieur
<	strictement inférieur
≥	supérieur ou égal
≤	inférieur ou égal
≠	différent
≡	équivalent (équivalence logique)
{ }	ensemble
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$	ensemble \mathbb{A} privé de l'ensemble \mathbb{B} , <i>i.e.</i> $C_{\mathbb{A}}(\mathbb{B})$ le complémentaire de \mathbb{B} dans \mathbb{A}
\emptyset	ensemble vide
	tel que
∈	appartient
∉	n'appartient pas
∀	pour tout (quantificateur universel)
∃	il existe (quantificateur universel)
∄	il n'existe pas
∃!	il existe un et un seul
⊂	est sous-ensemble (est contenu)
∪	union d'ensembles
∩	intersection d'ensembles
∨	ou
∧	et
¬	non
⇒	si ... alors ; implique
⇔	si et seulement si
ssi	si et seulement si
ln	logarithme de base e
\log_a	logarithme de base a
∞	infini
∫	symbole d'intégrale
$\sum_{i=0}^n a_i$	somme par rapport à l'indice i , équivaut à $a_0 + a_1 + \dots + a_n$
$\prod_{i=0}^n a_i$	produit par rapport à l'indice i , équivaut à $a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$
$n!$	n factoriel, équivaut à $1 \times 2 \times \dots \times n$
$g \circ f$	composé de f par g (on dit « g rond f » ou encore « f puis g »)
$f', \frac{df}{dx}$	symboles de dérivée
$\stackrel{(H)}{=}$	utilisation de la règle de l'Hôpital
$\stackrel{(P.P.)}{=}$	intégration par parties

calculate volume

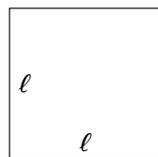


$$\begin{aligned} \text{volume} &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot z \cdot a \end{aligned}$$

1

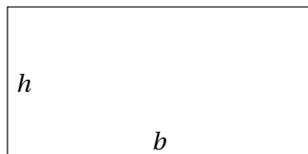
Formulaires de géométrie

1.1 Formulaire de géométrie plane



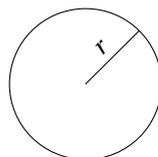
Périmètre $p = 4\ell$

Aire $A = \ell^2$



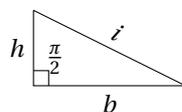
Périmètre $p = 2(b + h)$

Aire $A = bh$



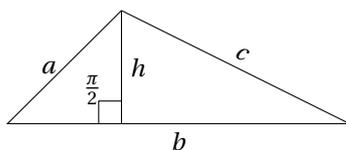
Périmètre $p = 2\pi r$

Aire $A = \pi r^2$



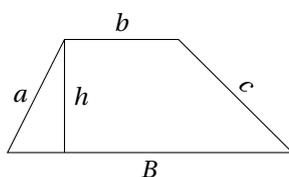
Périmètre $p = b + h + i$

Aire $A = \frac{bh}{2}$



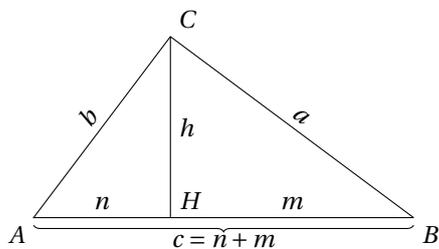
Périmètre $p = a + b + c$

Aire $A = \frac{bh}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$



Périmètre $p = a + B + c + b$

Aire $A = \frac{(B+b)h}{2}$



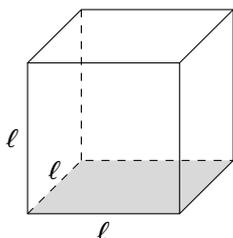
Triangle rectangle en C : $\widehat{ACB} = \pi/2$

Théorème de Pitagore
$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2, \\ b^2 = h^2 + n^2, \\ a^2 = h^2 + m^2 \end{cases}$$

Premier théorème d'Euclide
$$\begin{cases} b^2 = cn \\ a^2 = cm \end{cases}$$

Deuxième théorème d'Euclide $h^2 = nm$

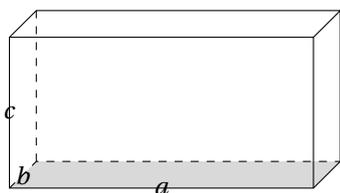
1.2 Formulaire de géométrie solide



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 4\ell^2$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 6\ell^2$

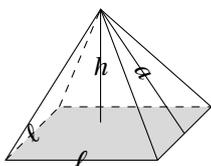
Volume $V = \ell^3$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2c(a + b)$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2(ab + ac + bc)$

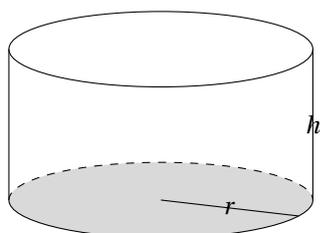
Volume $V = abc$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\ell a$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2\ell a + \ell^2$

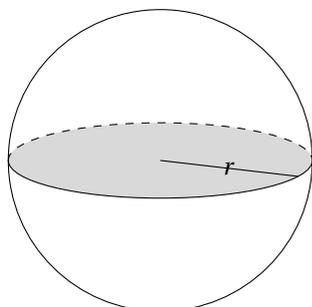
Volume $V = \frac{\ell^2 h}{3}$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h$

Surface totale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Volume $V = \pi r^2 h$



Surface totale $S_{\text{tot}} = 4\pi r^2$

Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Exercice 1.1

La scène d'une salle de concert a la forme d'un demi-cercle. Sa longueur est de 16 m. Quelle est sa surface, en m^2 ?

Exercice 1.2

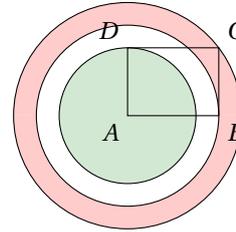
La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Exercice 1.3

1. Dans un triangle ABC , rectangle en A , soit $\overline{AB} = 8$ et $\overline{AC} = 6$. Quel est son périmètre ? Et son aire ?
2. L'aire d'un carré égale a . Quelle est la longueur de sa diagonale ?
3. Une pyramide à base carrée a une hauteur de 9 cm. Si le volume de la pyramide égale 768 cm^3 , quelle est la longueur du côté de sa base ?

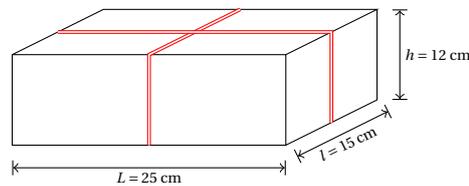
Exercice 1.4

Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AD} . Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon \overline{AB} et \overline{AC} et le disque de rayon \overline{AD} . Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



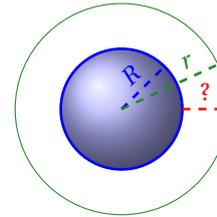
Exercice 1.5

On veut faire un paquet cadeau (voir dessin). On donne $L = 25 \text{ cm}$, $l = 15 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$. Calculer la longueur de la ficelle nécessaire sans les nœuds.



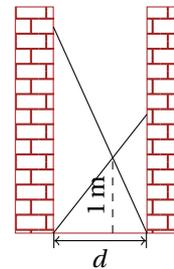
Exercice 1.6

★
★ Imaginons que l'on entoure la Terre au niveau de l'équateur, avec une ficelle, puis que l'on allonge cette longueur de ficelle d'un mètre. Quel sera l'espace libre ainsi créé entre la Terre et la ficelle ? Même question pour une balle de tennis.
★



Exercice 1.7

Entre deux murs (verticaux) parallèles, on place deux échelles en les croisant. La première fait 3 m de long, la seconde 2 m. On constate qu'elles se croisent à une hauteur de 1 m. Écrire l'équation à résoudre pour le calcul approché de la distance entre les deux murs.





2

Méthodologie disciplinaire

2.1 Pourcentages

Définition *Pourcentage*

Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

Exemple

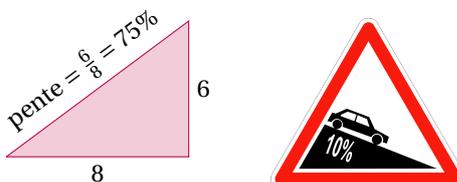
- ★ $1\% = 1/100 = 0.01$
- ★ 20% de 3 kg correspond à $0.2 \times 3 \text{ kg} = 0.6 \text{ kg}$

Définition *Pente*

Sur les panneaux de signalisation routière ou sur les pistes de skis, l'inclinaison des pentes est généralement exprimée sous la forme d'un pourcentage plutôt que celle d'un angle. On aurait tort de croire que cette valeur correspond directement à une valeur d'angle. En réalité, la pente est définie comme une distance verticale (un dénivelé) divisée par la distance horizontale correspondante :

$$\text{Pente (en \%)} = \frac{\text{Distance parcourue verticalement}}{\text{Distance parcourue horizontalement}}$$

Dans le cas d'une pente à 100%, chaque mètre parcouru horizontalement correspond à une montée d'un mètre verticalement. L'angle entre la route et l'horizontale est alors de 45° , et non davantage comme on le croit parfois.



On verra plus tard, lorsqu'on aura abordé les fonctions trigonométriques, que le passage entre un angle α et la pente correspondante p se fait grâce à la fonction tangente : $\tan(\alpha) = p$. Ainsi, si $\alpha < 45^\circ$ alors $p < 100\%$ tandis que si $\alpha > 45^\circ$ alors $p > 100\%$. Réciproquement, on peut obtenir la pente à partir de l'angle correspondant grâce à la fonction inverse, l'arc-tangente : $\arctan(p) = \alpha$. Il est clair alors que $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} p = +\infty$.

Définition *Taux*

Le taux d'augmentation (ou de diminution) est le rapport de la partie augmentée (ou diminuée) à la valeur initiale. Il est exprimé en pourcentage.

Exemple

Lorsqu'on augmente une quantité a de 20% on obtient la quantité $a + 0.2 \times a = (1 + 0.2)a = 1.2a$.

Exemple

- Dans un zoo, il y a 2 000 animaux. Parmi eux, 1 200 sont des mammifères. Quel est le pourcentage de mammifères dans le zoo ?
Réponse : $\frac{1200}{2000} \times 100\% = 0.6 \times 100\% = 60\%$.
- Dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux les reptiles constituent 5%. Combien y a-t-il de reptiles ?
Réponse : $2000 \times 5\% = 2000 \times \frac{5}{100} = 100$. On peut également imaginer ce problème en tant que proportionnalité : si 2 000 animaux correspondent à 100%, combien d'animaux correspondent à 5% ? Ainsi on crée une proportion : $\frac{2000}{100} = \frac{5}{x}$ d'où $x = 100$.
- Toujours dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux, 25% sont des oiseaux. 3% des oiseaux sont des aigles. Combien y a-t-il d'aigles dans le zoo ?
Réponse : $2000 \times 25\% \times 3\% = 2000 \times \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = 15$.
- Une année s'est écoulée dans le zoo, et le nombre d'animaux est devenu 2 030. Quel est le taux de croissance du nombre d'animaux ?
Réponse : $\frac{2030-2000}{2000} \times 100\% = \frac{30}{2000} \times 100\% = 1.5\%$.
- Le nombre de reptiles dans le zoo, comme on l'a vu, est de 100. Après un an, leur nombre a augmenté de 15%, mais l'année suivante il a diminué de 11%. Quel est le nombre de reptiles à la fin de la deuxième année ?
Réponse : Le réflexe presque naturel serait d'ajouter 15%, en déduire 11% et ainsi obtenir 104 reptiles, mais c'est faux. Souvenez-vous bien de la définition d'un taux. La solution correcte se présente de cette façon :
 - ★ 1ère année : $100 \times (1 + 15\%) = 100 \times \frac{115}{100} = 115$,
 - ★ 2ème année : $115 \times (1 - 11\%) = 115 \times \frac{89}{100} = 102$.
 La réponse est 102.

Taux d'intérêt

La somme placée dans une institution financière s'appelle le capital ; l'argent que le capital rapporte à son propriétaire suite à un tel placement s'appelle les intérêts ; les intérêts sont calculés en fonction du pourcentage du capital initial, ce pourcentage s'appelant le taux d'intérêt.

On s'intéresse ici au calcul des taux d'intérêt simples, fixes et annuels. On s'intéresse aussi aux intérêts composés : il s'agit du taux d'intérêt applicable au capital et aux intérêts gagnés au cours des périodes de placement précédentes.

Exemple Intérêt continu

- Un capital de 5000 € a été placé dans une banque sous 5%, taux annuel. Quelle somme sera disponible à l'investisseur au bout d'un an ?
Réponse : calculons d'abord le montant des intérêts : $5000 \text{ €} \times 5\% = 250 \text{ €}$. Ensuite, pour calculer la somme disponible, il faut ajouter ce montant à la somme placée : $5000 \text{ €} + 250 \text{ €} = 5250 \text{ €}$.
- Un compte d'épargne donne 5% d'intérêts par an. Le premier janvier on met 10 000 € sur ce compte. La banquier nous laisse le choix entre plusieurs modes de virement des intérêts : soit 5% à la fin d'année (taux 5%), soit à la fin de chaque mois (taux 5%/12), soit tous les jours (taux 5%/365), soit toutes les heures (taux 5%/(365 × 24)), etc. Quel choix est le plus avantageux pour nous ? Est-ce que le montant augmente infiniment si le temps d'intervalle approche zéro ?
Réponse : notons S la somme au bout d'un an.
 - ★ Virement annuel : $S = (1 + 0.05) \times 10\,000 \text{ €} = 10\,500 \text{ €}$.
 - ★ Virement mensuel : $S = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} \times 10\,000 \text{ €} = 10\,511.62 \text{ €}$.
 - ★ Virement quotidien : $S = \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365} \times 10\,000 \text{ €} = 10\,512.67 \text{ €}$.

Ainsi, plus petit est intervalle de temps entre deux virements d'intérêts plus on touche d'intérêts.

Le montant n'augmente pas infiniment si le temps d'intervalle approche zéro. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$. En reprenant notre exemple on trouve $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n \times 10\,000 \text{ €} = e^{0.05} \times 10\,000 \text{ €} \approx 10\,512.71 \text{ €}$

Astuce Pourcentages

- ★ Pour appliquer un taux de pourcentage $p\%$ à un nombre x on le multiplie par $\frac{p}{100}$.
- ★ Le taux de pourcentage de x par rapport à y est égale à $\frac{x}{y} \times 100$.
- ★ Pour augmenter un nombre x de $p\%$, on le multiplie par $1 + \frac{p}{100}$.
- ★ Pour diminuer un nombre x de $p\%$, on le multiplie par $1 - \frac{p}{100}$.
- ★ Pour une augmentation de $p\%$, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1 + \frac{p}{100}$.
- ★ Pour une diminution de $p\%$, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1 - \frac{p}{100}$.
- ★ Pour composer (enchaîner) les pourcentages, il ne faut pas les ajouter.

2.2 Proportionnalité et règle de trois

La règle de trois est une recette utilisée pour calculer dans des situations de proportionnalité. Son symbole, une croix, n'est pas très intuitif pour décrire une situation que les mathématiciens qualifient de linéaire et qu'ils représentent par une droite. C'est une notion subtile qui se rapproche de celle de fraction.

Une situation est proportionnelle lorsque des parts égales contribuent au tout de la même façon.

Exemple

Supposons que pour faire des crêpes pour 8 personnes, il faille 250 g de farine, 4 œufs, un demi-litre de lait et 50 g de beurre. En divisant en deux parts égales tous les ingrédients, on pourra faire des crêpes pour 4 personnes. Si l'on n'était que 2, on pourrait à nouveau diviser ces quantités en 2, c'est-à-dire : 62.5 g de farine, 1 œuf, 125 mL de lait et 12.5 g de beurre. Si nous faisons 4 tas comportant chacun cette liste d'ingrédients, nous pouvons faire, avec chacun d'eux, des crêpes pour 2 personnes. Avec deux tas, nous retrouvons nos quantités pour 4 personnes et avec 4 tas, nos quantités pour 8 personnes. Et ainsi, si nous étions 6 personnes, il suffirait de prendre 3 de ces tas.

Comme l'œuf n'est pas divisible en deux parties, avec cette idée, on peut trouver la quantité d'ingrédients pour faire des crêpes pour un nombre pair de convives en prenant autant de tas qu'il y a de couples de convives. Si nous étions un nombre impair, il faudrait soit en prévoir un peu moins, soit un peu plus que la quantité prévue par la recette.

Cette situation peut se résumer par un tableau de proportionnalité

Nombre de convives	2	4	6	8
Farine	62.5 g	125 g	187.5 g	250 g
Œufs	1	2	3	4
Lait	0.125 L	0.25 L	0.375 L	0.5 L
Beurre	12.5 g	25 g	37.5 g	50 g

Définition *Grandeurs proportionnelles*

On peut dire que deux grandeurs x et y sont proportionnelles s'il existe un nombre m tel que $y = mx$ (le nombre m est le coefficient de proportionnalité).

Remarque

Une proportion représente une égalité de deux fractions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La qualité notable de la proportion est le fait que les produits des membres «en croix» sont égaux entre eux. Pour la proportion ci-dessus

$$ad = bc$$

Ceci signifie également qu'on peut échanger les places des membres «en croix» de la proportion, sans que l'égalité perde son sens :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Exemple

Johann gagne de l'argent en été en tondant les gazons de ses voisins. Il est payé pour ses services par mètre carré de gazon tondu. S'il a tondu les 25 m² du gazon de Mme DUPONT pour 10 €, combien Mme DUBOIS devra-t-elle payer pour les services de Johann si son gazon mesure 35 m² ?

Réponse : notons x le prix que devra payer Mme DUBOIS. On a alors la proportion $\frac{25 \text{ m}^2}{10 \text{ €}} = \frac{35 \text{ m}^2}{x \text{ €}}$ ce qui donne $x \text{ €} = 35 \text{ m}^2 \times \frac{10 \text{ €}}{25 \text{ m}^2} = 14 \text{ €}$.

Exemple *Partages proportionnels*

Partager une somme de 2400 € en deux parties x et y proportionnelles à 7 et 5, ceci signifie que $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ avec $x + y = 2400$:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5}, \\ x + y = 2400, \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{7} = 480 - \frac{x}{5}, \\ y = 2400 - x, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1400, \\ y = 1000. \end{cases}$$

Échelle

La proportionnalité est également utilisée dans la notion de l'échelle. L'échelle d'une carte ou d'un plan est notée normalement en format «1 ÷ a », où a indique le taux de réduction du plan par rapport au terrain réel :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{longueur réelle}}$$

Exemple

Une carte est dessinée à l'échelle 1 ÷ 250000 signifie que chaque kilomètre sur le terrain a été réduit 250000 fois pour être représenté sur la carte : soit 1 km du terrain correspond à 4 mm sur la carte. Soit, inversement, chaque unité sur la carte représente 250000 unités sur le terrain : par exemple, 1 cm sur la carte représente 250 000 cm sur le terrain soit 2.5 km.

Exemple

Sur un plan dessiné à l'échelle 1 ÷ 1500, la distance entre deux arbres est 16 cm. Quelle est la distance entre ces arbres en réalité ?

Réponse : on crée une proportion : $\frac{1}{1500} = \frac{16 \text{ cm}}{x \text{ m}}$ d'où $x = 240 \text{ m}$.

Attention

Toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Exemple

Il existe en fait toute sorte de variation d'une quantité en fonction d'une autre et la situation de proportionnalité est la plus simple, aussi essaye-t-on toujours, quand c'est possible, de s'y ramener.

- ★ La distance de freinage ne se relie pas simplement au temps de réaction du conducteur. Si il ou elle met deux fois plus de temps à réagir, la voiture parcourra très certainement bien plus que deux fois plus de distance avant de s'arrêter.
- ★ Le temps mis par un athlète n'est pas non plus proportionnel à la distance qu'il parcourt. Le record du monde du 400 m est supérieur à deux fois le record du monde du 200 m. Au cours d'un 10000 m les premiers tours sont parcourus à des vitesses différentes des derniers tours.
- ★ Le coût d'une course en taxi comporte une prise en charge à laquelle s'ajoute une somme proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus.
- ★ Certains phénomènes sont quadratiques. Le poids d'un disque (homogène) de métal n'est pas proportionnel à son rayon, mais au carré de son rayon.

2.3 Géométrie analytique

Définition Droite

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés. Les points (x, y) du plan qui vérifient l'équation

$$ax + by + c = 0$$

appartiennent à une droite. Si $b \neq 0$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$y = mx + q$$

avec $m = -\frac{a}{b}$ la pente de la droite et $q = -\frac{c}{b}$ l'interception de la droite avec l'axe des ordonnées.

Propriété

Soient m_1 et m_2 la pente de r_1 et r_2 deux droites, alors

- ★ $r_1 \parallel r_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$,
- ★ $r_1 \perp r_2$ si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$.

Intersection de deux droites

Si deux droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ne sont pas parallèles, elles se croisent en un point qui est solution du système linéaire

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

En particulier, pour calculer les intersections d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec les axes, il suffit de résoudre deux systèmes linéaires :

- ★ intersection avec l'axe des abscisses :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

- ★ intersection avec l'axe des ordonnées :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Droite passant par deux points

L'équation de la droite passant par les deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$\begin{aligned} x &= x_1 && \text{si } x_1 = x_2, \\ y &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 && \text{si } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

Définition Cercle

L'équation du cercle de centre (x_c, y_c) et rayon r est

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma \geq 0,$$

avec $x_0 = -\frac{\alpha}{2}$, $y_0 = -\frac{\beta}{2}$ et $r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$.

2.4 Puissances**Propriété Puissances**

① $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

② $a^b : a^c = a^{b-c}$

③ $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

④ $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

⑤ $(a : b)^c = a^c : b^c$

⑥ $(a^c)^b = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$

⑦ $\sqrt[c]{a} = a^{1/c}$

Produits à apprendre par cœur

① $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

② $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

③ $(A \pm B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB + 2AC \pm 2BC$

④ $(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$

⑤ $(A^2 - B^2) = (A - B) \cdot (A + B)$

⑥ $(A^3 - B^3) = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$

⑦ $(A^3 + B^3) = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$

2.5 Équations et inégalités de degré 1

	Solutions de l'équation $ax = b$	Solutions de l'inégalité $ax > b$	Solutions de l'inégalité $ax < b$
Si $a > 0$	$x = b/a$	$x > b/a$	$x < b/a$
Si $a < 0$	$x = b/a$	$x < b/a$	$x > b/a$

2.6 Équations et inégalités de degré 2

On ne considère ici que le cas $a > 0$ auquel on peut toujours se ramener

Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ ($a > 0$)	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$	Solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$
Si $\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	$x < x_1$ ou $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
Si $\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	\nexists solution
Si $\Delta < 0$	\nexists solution réelle	$\forall x \in \mathbb{R}$	\nexists solution

Rappelons que

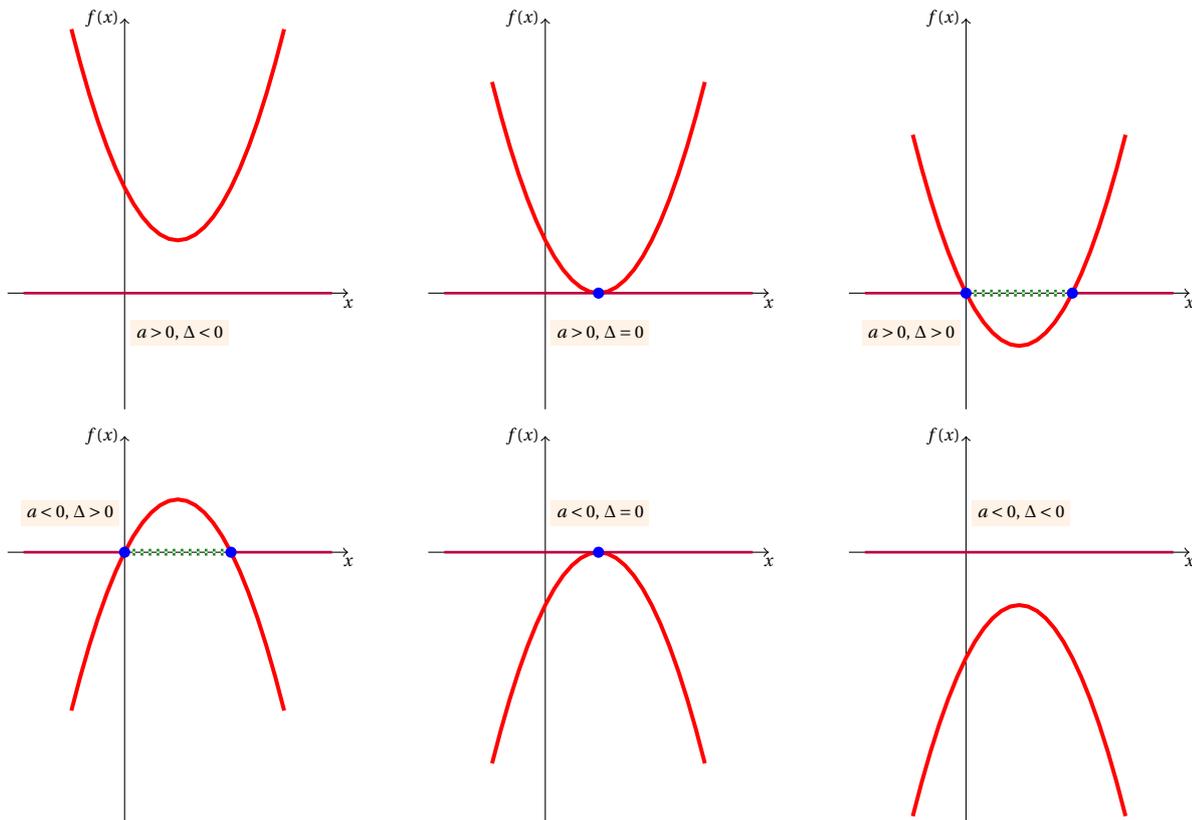
★ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

★ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 \cdot x_2 = c/a \end{cases}$

Le tableau ci-dessus a une interprétation géométrique : si on associe au trinôme $ax^2 + bx + c$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, on peut interpréter les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ comme les intersections de la courbe représentative de la parabole avec l'axe des x . Ci-dessous, les figures du haut représentent les trois positions possibles

de la parabole lorsque $a > 0$: de gauche vers la droite on a aucune intersection, une intersection et deux intersections (respectivement, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$). En bas les trois cas lorsque $a < 0$: de gauche vers la droite on a deux intersections, une intersection et aucune intersection (respectivement, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$). Pour résoudre les inégalités $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ il suffit d'étudier la position de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ par rapport à l'axe des x :

- ★ les cercles représentent les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- ★ en **bleu** on a les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$;
- ★ en **vert pointillé** les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$.



2.7 Équations exponentielles

Une équation est exponentielle si l'inconnue apparaît en exposante.

Équation	Solution
$a^x = c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	$x = \log_a c$
$ma^{f(x)} = nb^{g(x)}$ (avec $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)	$\ln m + f(x) \ln a = \ln n + g(x) \ln b$
$f(a^x) = c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	On pose $t := a^x$

2.8 Propriétés des logarithmes

Propriété

Soit $a > 0$, $a \neq 1$.

- ① Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a(b_1) + \log_a(b_2)$.
- ② Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a(b_1) - \log_a(b_2)$.
- ③ Si $b > 0$ alors $\log_a(b^k) = k \log_a(b)$.
- ④ $\log_a(1) = 0$.
- ⑤ $\log_a(a) = 1$.
- ⑥ $\log_a(a^c) = c$.
- ⑦ Si $c > 0$ alors $a^{\log_a(c)} = c$.
- ⑧ Si $b > 0$ alors $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ avec $c > 0$ et $c \neq 1$ (Règle du changement de la base).

Notamment, on rappelle la chaîne d'égalités suivante :

$$\log_a x = -\log_a \frac{1}{x} = -\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_x a}$$

2.9 Équations logarithmiques

Une équation est logarithmique si l'inconnue apparaît sous le symbole de logarithme. Puisqu'on a $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln x}$, on peut toujours se ramener au cas où l'inconnue n'apparaît qu'en argument du logarithme.

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f(\log_a g(x)) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

2.10 Systèmes linéaires

Définition *Système linéaire*

Soit $n, p, \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

- ★ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de \mathbb{R} . Les INCONNUES x_1, x_2, \dots, x_p sont à chercher dans \mathbb{R} .
- ★ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ★ Une SOLUTION de (S) est un p -uplet (x_1, x_2, \dots, x_p) qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ★ Un système est CARRÉ si $n = p$.
- ★ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution. Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ★ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.

📖 Définition Système échelonné

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \quad + x_6 = b_1 \\ \quad 3x_3 - x_4 + 2x_5 \quad = b_2 \\ \quad \quad -x_5 + x_6 = b_3 \\ \quad \quad \quad 5x_6 = b_4 \\ \quad \quad \quad \quad 0 = b_5 \end{array} \right. \quad (S)$$

📖 Réduction

Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \dots + 0x_p = b,$$

- ★ si $b \neq 0$ le système est impossible,
- ★ si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

📖 Méthode du pivot de GAUSS

Soit $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la matrice des coefficients du système (S).

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes du système, on peut supposer $a_{kk} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape k). On transforme toutes les lignes L_i avec $i > k$ comme suit :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k,$$

ce qui élimine l'inconnue x_k dans les lignes L_i (à l'étape j , cette méthode fait apparaître des 0 sur la j -ème colonne pour les lignes $i > j$).

En répétant le procédé pour k de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

📖 Exemple

Soit le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{array} \right.$$

Résolution par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{Étape } k=1]{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } k=2]{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{Étape } k=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{array} \right.$$

donc

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Calcul

Exercice 2.1

Mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A = \frac{51}{136},$$

$$B = \frac{1015}{2450},$$

$$C = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125},$$

$$D = 1 - \frac{27}{125} - \frac{549}{1000},$$

$$E = \frac{549}{1000} + 2 \times \frac{235}{1000},$$

$$F = 0.00000125.$$

Exercice 2.2

Calculer

$$A) 12.5\% \text{ de } 164$$

$$B) 13\% \text{ de } 50\% \text{ de } 800$$

$$C) \frac{300}{30\%}$$

$$D) 14 \times 5\%$$

$$E) (412 - 518) \times 116\%$$

Exercice 2.3

Sans utiliser la calculatrice donner la valeur des expressions suivantes :

$$A) \frac{\frac{4}{7} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}$$

$$B) \frac{\left(\frac{2^{18} \times 2^{-6}}{2^9}\right)}{(2^{-2})}$$

Exercice 2.4

Laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur ?

$$i) \frac{4}{7}, \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{5}{8};$$

$$ii) \sqrt{100+69}, \quad \sqrt{100} \times \sqrt{9}, \quad \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}, \quad (\sqrt{100})^{-6}.$$

Exercice 2.5

Simplifier :

$$A = \log_5(25) - \log_5(5)$$

$$B = \log_{x^2+1}(1) + \log_{2012}(1) + \log_{10^7}(1)$$

$$C = \log_{10}(0.1) + \log_{10}(0.01) + \log_{10}(0.001)$$

$$D = \frac{\log_{10}(10^3) + \log_{10}^2(1) + \log_{2012}^{2012}(2012)}{2^3 + 2}$$

Exercice 2.6

Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $A = 2x$, $B = 4x^2 - 1$. Calculer

$$C = 2xB - A,$$

$$D = 2xC - B,$$

$$E = 2xD - C.$$

Exercice 2.7

Écrire sous forme d'une seule fraction irréductible la fraction

$$\frac{\left(\frac{x}{2} + 4x\right)}{\left(\frac{3x+2}{4-4x}\right)x}.$$

Exercice 2.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

$$1. \frac{n^2 - 1}{9} - \frac{n + 1}{6},$$

$$4. \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - 4 \frac{(n+1)^2}{9},$$

$$2. \frac{(n-2)(n+1)}{4} + 4 \frac{n+1}{3},$$

$$5. -\frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right].$$

$$3. \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4},$$

Puissances

Exercice 2.9

Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$a) (2^2)^2$$

$$b) 2^{(2^2)}$$

$$c) (2^2)^3$$

$$d) 2^{(2^3)}$$

$$e) \left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$$

$$f) \frac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}.$$

Exercice 2.10

Calculer $-\frac{1}{n^{2/3}}$ pour $n = 10^{45}$.

Exercice 2.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3^n}{3^{3n}}, \quad B = \frac{(2^{2n+1})^2}{2^{2n-1}}, \quad C = 4^n - 2^{2n-1}, \quad D = \frac{1}{(-1)^{2n+1}} + (-1)^{2n-2}.$$

Exercice 2.12

Calculer, factoriser ou simplifier : a) $(e^3)^6$ b) $e^3 e^6$ c) $e^3 + e^6$ d) $e^{-6} e^8$ e) $2^4 4^7$ f) $2^4 e^5$

Exercice 2.13

Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A = 1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5} \quad B = (\sqrt[6]{3})^3 \quad C = \sqrt[5]{3} \sqrt[3]{9} \sqrt[15]{3^2} \quad D = \frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \quad E = \frac{x^3 x^{5n}}{x^{2n} x^5}$$

$$F = (x^{-n+1})^2 (x^3)^{n-2} \quad G = \sqrt{2^{2(2n+1)}} \quad H = (2^{2n})^{(2n)^{2n}} \quad I = \frac{2 \times ((2^{2n-1})^2)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Exercice 2.14

Soit n un entier naturel et soit a et u deux réels. Mettre sous la forme $a^p u^q$ le réel $u_n = a \left(a^{2n+1} u^{2^n} \right)^2$ (attention, les exposants ne sont pas $2n+1$ et $2n$ mais 2^{n+1} et 2^n).

Logarithmes et exponentielles

Exercice 2.15

Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1) \quad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \quad C = \ln(1 + \cos(x)) + \ln(1 - \cos(x)) - 2 \ln(\sin(x)).$$

Exercice 2.16

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1), \quad B = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \quad C = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Exercice 2.17

Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	\sqrt{e}	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Exercice 2.18

Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$	b) $\log_5(1/25)$	c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$
d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$	e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$	f) $\log_{10}(10) \log_{10}(4)$
g) $\log_3(108) - \log_3(4)$	h) $\log_{10}(0.1)$	i) $\log_{10}(100/67)$
j) $3 \log_{10}(10)$	k) $\log_{10}(1)$	l) $\log_2(8)$
m) $\log_2(0.25)$	n) $\ln(1/e)$	o) $(\ln(e))^{-1}$

Exercice 2.19

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right), \quad B = \exp\left(-\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{v}\right)}\right) \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{v}\right)\right), \quad C = \left(\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)\right)^{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)},$$

$$D = \exp\left(x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right), \quad E = \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{x^2 - x^4}\right) + \frac{1}{x}\right), \quad F = \frac{\exp(\ln|1+x| - \ln|1-x|)}{\exp(\ln|1+x| - \ln|x-1|)},$$

$$G = \frac{1}{e} \exp\left((x+1)^2 - e^{2\ln(x)}\right), \quad H = \frac{e^{3\ln(2x) - \ln(x)} e^{1-3\ln(x)}}{x e^{x-2}}.$$

Exercice 2.20

Résoudre l'inégalité $\log_2 |x-1| \leq 6 + \log_{1/2}((x-1)^2)$.

Exercice 2.21

Montrer que $\log_a(x) \log_b(y) = \log_b(x) \log_a(y)$.

Systèmes linéaires

Exercice 2.22

Dans le système d'équations suivant, quelle est la valeur de y ?

$$\begin{cases} 4x - 3y = 84 \\ 5x + 7y = 19 \end{cases}$$

Exercice 2.23

Résoudre le système suivant d'inconnues A et B (le réel C est supposé connu) :

$$\begin{cases} A + B = C \\ \alpha A = \beta B \end{cases}$$

Exercice 2.24

Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

Exercice 2.25 Résolution de systèmes non carrés

Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.26

Soit le système linéaire

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 = b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Exercice 2.27 Résolution de systèmes non carrés

Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 6, \\ -x - y + 2z = 0, \\ 3x + 2y - 4z = 1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.28 Résolution de systèmes non carrés

Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ 2x + y - z = 1, \\ -x + y + 2z = -2, \\ x + y + z = 4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.29

Soit le système linéaire

$$(S) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système possède-t-il une solution unique ?

Exercice 2.30

Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.31

En utilisant la méthode de GAUSS, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x - y + 2z = 7, \\ 3x + az = 10. \end{cases}$$

Exercice 2.32

Soit le système linéaire

$$(S) \begin{cases} x - ay = 1, \\ \alpha x - y = 1. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 2.33

Soit le système linéaire

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + \beta z = 3, \\ x + \beta y + 3z = -3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

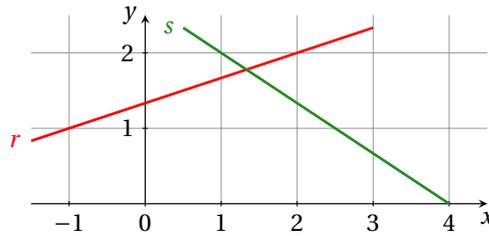
Exercice 2.34

Déterminer si le système suivant a une solution non nulle. Dans le cas affirmatif trouver la(les) solution(s) :

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 3x + 4y - 6z = 0, \\ 3x - 11y + 12z = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.35

Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Exercice 2.36 V. GUIRARDEL

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Équations et inégalités

Exercice 2.37

Calculer la valeur de l'inconnue x :

$$1. \frac{30}{75} = \frac{20}{x}$$

$$2. \frac{4}{x+5} = \frac{5}{x-23}$$

$$3. \frac{6x}{x+14} = \frac{6}{8}$$

$$4. \frac{(55x-38) \times 4}{11} = \frac{4}{\frac{3}{8}}$$

$$5. \frac{\sqrt{x}}{8} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Exercice 2.38

Résoudre $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2 - (3+2x))(3-4)$.

Exercice 2.39

Quelle est la valeur de x qui vérifie $35x + 3(18 - 26x + 4^2) = 70 - 3x$?

Exercice 2.40

Calculer suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

$$1. f(x) = x^2 - x - m,$$

$$2. f(x) = m^2 x^2 + mx + m - 1.$$

Exercice 2.41

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

$$1. x^2 > 10000,$$

$$2. \frac{1}{x} > 10000,$$

$$3. \frac{1}{x} < 10^{-6},$$

$$4. x^2 < 0.0001,$$

$$5. \frac{1}{x} > 0.0001,$$

$$6. x^2 > 1.$$

Exercice 2.42

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Exercice 2.43

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1. e^x - 2 + e^{-x} = 0,$$

$$2. x^4 + 3x^2 = k, \text{ où } k \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre,}$$

$$3. \left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right)^{x^2 - 6x + 1} = 1.$$

Exercice 2.44

Trouver toutes les solutions dans \mathbb{R} des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} < 1 + \frac{1}{4-x^2}$ $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$
 2. $x|x| < 1$ $] -\infty, 1[$
 3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ $]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$
 4. $|4 - x^2| - |3 - x| > x$ $]-\infty, -\sqrt{7}[\cup]-1, 1[\cup]+\sqrt{7}, +\infty[$
 5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ $] -\infty, 0[$
 6. $\sqrt{2x+1} > x$ $]-1/2, 1 + \sqrt{2}[$
 7. $\sqrt{x+2} < x$ $]2, +\infty[$
 8. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 1$ $]4, +\infty[$
 9. $\sqrt{\frac{x^2 + 8|x| - 9}{x^2 - 1}} \geq x - 3$ $]-\infty, 5 + \sqrt{17}/2[\setminus \{-1, 1\}$
 10. $\sqrt{4x^2 + 3x - 1} \geq 2x - 3$ $]-\infty, -1[\cup]1/4, +\infty[$
 11. $\frac{\sqrt{1 - 9x^2} + 2x}{3x - 2} > 0$ $]-1/3, -1/\sqrt{13}[$
 12. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq 3$ $]3, +\infty[$
 13. $\frac{\sqrt{2x-5}}{3} \leq \frac{3}{\sqrt{2x-5}}$ $]5/2, 7[$
 14. $\sqrt{4 + |1 - x^2|} < x + \sqrt{5}$ $]0, +\infty[$
 15. $\frac{\sqrt{x} + 1}{3 - x - \sqrt{x}} < 0$ $]7 - \sqrt{13}/2, +\infty[$
 16. $\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} < \sqrt{x}$ $]1, +\infty[$
 17. $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $] \pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
 18. $\frac{1 - 2\sin(x)}{1 - 2\cos(x)} \leq 0$ $]-\pi/3 + 2k\pi, \pi/6 + 2k\pi[\cap] \pi/3 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
 19. $\frac{\sin(x)}{\sqrt{2\sin(x) - 1}} \geq 1$ $] \pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
 20. $\frac{\tan^2(x) - \sqrt{3}\tan(x)}{\tan^2(x) - 1} < 1$ $]-\pi/4 + k\pi, \pi/6 + k\pi[\cup] \pi/4 + k\pi, \pi/2 + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
 21. $\frac{e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - 5e^x + 2} > -1$ $]-\infty, \ln(1 - \sqrt{3}/3)[\cup] -\ln 2, \ln(1 + \sqrt{3}/3)[\cup] \ln 2, +\infty[$
 22. $\frac{\ln(x-2)}{\sqrt{1 - \ln(x-2)}} < 2$ $]2, e^{2(\sqrt{2}-1)} + 2[$
 23. $\frac{(2/3)^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$ $]1, 5/2[$
 24. $\frac{e^x + e^{\sqrt{x}} + 2}{e^{2x} - e} \geq 0$ $]1/2, +\infty[$
 25. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$ \emptyset
 26. $3^{x+2} \leq 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$ $]-\infty, -2[$
 27. $x - 1 < \sqrt{x+4}$ $[-4, (3 + \sqrt{21})/2[$
 28. $\log_5(x-7) > 2$ $]32; +\infty[$
 29. $\log_{2/3}(x^2 - 1) > 2$ $]-\sqrt{13}/3, -1[\cup]1, \sqrt{13}/3[$
 30. $\log_{1/2} \sqrt{x} < \log_{1/2} |x-1|$ $]3 - \sqrt{5}/2, (3 + \sqrt{5})/2[\setminus \{1\}$
 31. $3^{2-x} + 2 \cdot 3^x < 19$ $]-\ln(2)/\ln(3), 2[$
 32. $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\ln^2 x - 4) \leq 0$ $]0, e^{-2}[\cup]1, e^2[$
 33. $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$ $]0, 3/(2\sqrt{2}[$
 34. $\log_{1/4} \sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$ $]1, 5/2[$
- © G. FACCANONI 21
35. $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} + 1 \geq 0$ $]1/e, 1[\cup]e, +\infty[$
 36. $\log_{1/2}(7^{2x} - 7^x + 1) > 0$ $]-\infty, 0[$
 $(|x| = 1)$

Géométrie analytique

Exercice 2.45 Droites

1. Trouver l'équation de la droite passant par (2,3) et parallèle à la droite passant par (7,9) et (3,-2).
2. Trouver l'équation de la droite passant par (2,6) et (3,10). Quelle est sa pente? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par (7,2). Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes?
3. Trouver l'équation de la droite passant par (5,-3) et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x + 3y = 9$ et qui passe par (2,5). Trouver l'intersection entre les deux droites.

Exercice 2.46 Cercles

1. Trouver l'équation du cercle de centre (-2,-5) et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2 + y^2 + kx - 2y + k^2 - 2 = 0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Exercice 2.47 Paraboles

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x + 2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2 - 5x + 2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x - 1$ avec la parabole passant par les points (0,3), (1,8) et (-2,-1).

Exercice 2.48

Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

Exercice 2.49 Le crible de MATIYASEVITCH

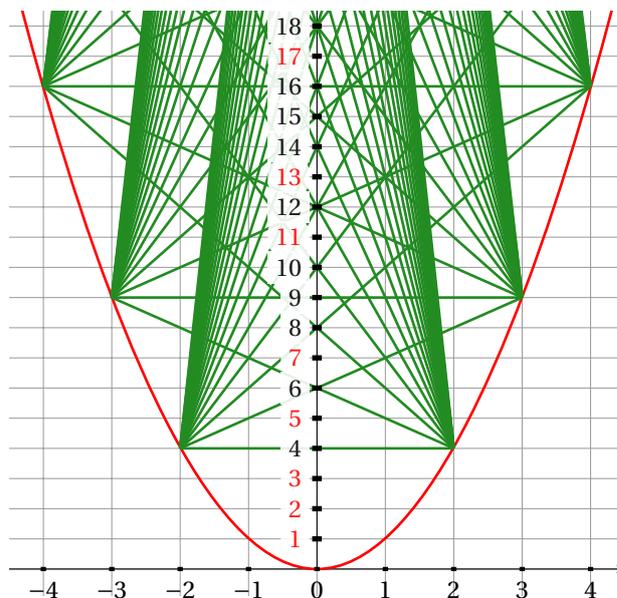
Traçons la parabole d'équation $y = x^2$. Sur ce graphe, on va considérer deux familles de points :

- ★ pour tout $i \geq 2$, i entier, on note A_i le point de coordonnées $(-i, i^2)$,
- ★ pour tout $j \geq 2$, j entier, on note B_j le point de coordonnées (j, j^2) .

Relions tous les points A_i à tous les points B_j .

1. Montrer que tous les segments $[A_i B_j]$ croisent l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer qu'un nombre situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, un des segments $[A_i B_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Que représente-t-il le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier?

Rappel : un nombre $n \in \mathbb{N}^$ est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.*



Problèmes

Exercice 2.50

Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing.
Combien pèse un parpaing?



Exercice 2.51

Une bouteille et son bouchon coûtent 11 €. Sachant que la bouteille coûte 10 € de plus que le bouchon, combien coûte la bouteille?

Exercice 2.52

Un grand aquarium contient 200 poissons. De ceux-ci, 99% sont des poissons rouges. On voudrait que ce pourcentage baisse à 98%. On décide donc de retirer des poissons rouges. Combien de poissons rouges doit-on enlever de l'aquarium?

◆ **Exercice 2.53** *Paul HALMOS, “Problème pour mathématiciens, petits et grands”*

On suppose que les concombres sont composés de $a\%$ d'eau. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain les concombres ne contiennent plus que $b\%$ d'eau avec $0 < b < a < 100$. Quel est le poids des concombres restantes ?

Considérer par exemple $M = 500$, $a = 99$ et $b = 98$.

◆ **Exercice 2.54**

Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% de votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

◆ **Exercice 2.55**

Un commercial touche une commission de 15% sur les ventes qu'il réalise au cours d'un mois. Si pour le mois d'avril le commercial a touché 1400 € de commission, quel est le montant des ventes qu'il a perçues en avril ?

◆ **Exercice 2.56**

D'une manière générale, le groupe sanguin AB est le plus rare et représente 4% de la population humaine. Le rhésus négatif, lui aussi, est assez rare (15% de la population uniquement). Si la population totale de la planète est de 6 milliards de personnes, combien sont de type AB- ?

◆ **Exercice 2.57**

Le prix du blé dans un certain pays est indexé sur l'inflation. Au 1er janvier 1990, le blé coûtait 140 dollars la tonne. L'inflation de 1990 était de 3%. Par contre, en 1991, le pays a connu une déflation de 1.5%. Combien coûtait une tonne de blé au 1er janvier 1992 ?

◆ **Exercice 2.58**

La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

◆ **Exercice 2.59**

Pendant la période des soldes, Éva trouve un pull marqué 59 € sur un stand avec une pancarte «-40%». Elle aime beaucoup le pull, mais il y a une petite tâche qu'Éva compte éliminer elle-même. La vendeuse lui propose une réduction supplémentaire de 10% sur le prix de caisse. Combien Éva payera-t-elle pour le pull ?

◆ **Exercice 2.60**

Un certain dessert coûte 12 € TTC. Avec la baisse de TVA sur la restauration, de 19.6% à 5.5%, quel sera le nouveau prix de ce dessert ?

◆ **Exercice 2.61**

Antoine place 1000 € sur son Livret A. Quel montant recevra-t-il au bout de deux ans si le taux en vigueur pour le Livret A est maintenu au niveau de 1.2% ?

◆ **Exercice 2.62**

Un capital a été placé dans une banque à un taux annuel de 4.5%. Les intérêts accumulés à la fin de l'année s'élèveront à 126 €. Quel est le montant initialement placé ?

◆ **Exercice 2.63**

Un artisan installe des fenêtres dans les habitations. Si un particulier achète uniquement une fenêtre sans installation, le taux de TVA applicable est de 19.6%. Si un particulier achète une fenêtre et commande son installation auprès du même artisan, le taux de TVA applicable au produit et au service est de 5.5%. Si le prix HT d'une fenêtre est 600 € et le prix HT de l'installation est de 150 €, quelle est la différence de prix des deux options pour le particulier ?

◆ **Exercice 2.64**

Sur 1.4 million d'iPhone vendu depuis juin, environ 250 000 ont été débloquent grâce à des logiciels pirates. Quel pourcentage représente cela ? (Arrondir à 1% près).

◆ **Exercice 2.65**

Le service de restauration dans un avion propose un plat au choix : soit de l'agneau, soit du poulet. 42% des passagers ont commandé l'agneau, 36% ont commandé le poulet, et les autres 55 passagers n'ont pas pris de plat chaud. Combien y a-t-il de passagers à bord de l'avion ?

◆ **Exercice 2.66**

Un couple achète un panneau photovoltaïque au prix de 1674.40 € TTC. Le gouvernement octroie un crédit d'impôt applicable à ce type d'installation à hauteur de 40% du prix HT. Si le taux de TVA en vigueur applicable aux panneaux photovoltaïques est de 19.6%, quel est le montant du crédit d'impôt dont bénéficiera le couple ?

◆ **Exercice 2.67**

Pendant les soldes un magasin donne une remise de 30%. Le prix non-soldé d'une veste est de 70 € ; quel est son prix soldé ? Le prix soldé d'une chemise est de 21 € ; quel est son prix non-soldé ?

◆ **Exercice 2.68**

64% des élèves d'une classe sont des garçons et 25% parmi ces garçons apprennent l'allemand. Quel est le pourcentage des garçons qui font de l'allemand dans la classe ?

Exercice 2.69

Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Exercice 2.70

Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Exercice 2.71

Un prix subit les variations annuelles suivantes : +25%, -5%, +10%, -10%, -8%, +20%. À combien s'élève la variation annuelle moyenne ?

Exercice 2.72

M. DEZÈLE fait un emprunt de 100 000 € à sa banque. Le taux d'intérêts est de 3% par an, ou encore (3/12)% par mois. Chaque mois M. DEZÈLE rembourse un même montant à la banque, appelé «annuité constante mensuelle». Après 10 ans exactement le crédit est entièrement remboursé. On note

- ★ $t = 0.03/12 = 0.0025$ le taux d'intérêt mensuel,
- ★ $d = 120$ la durée du crédit en mois,
- ★ $S_0 = 100000$ l'emprunt initial,
- ★ a l'annuité constante mensuelle.

1. On suppose que l'emprunt commence le 1^{er} janvier et que le paiement de l'annuité se fait à la fin de chaque mois. On note S_1 la dette au 1^{er} février, S_2 la dette au 1^{er} mars, etc. Montrer que $S_{n+1} = (1+t)S_n - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir la formule qui donne l'annuité a en fonction de la durée du crédit, du taux d'intérêt et du montant initial de l'emprunt.
3. Utiliser cette formule pour calculer l'annuité de M. DEZÈLE. Quel est le montant total des intérêts payés lors de ce crédit ?

Exercice 2.73

En Irlande, le prix d'un certain livre est 12.5 € HT ou 13.1 € TTC. Quel est le taux de la taxe sur la valeur ajoutée applicable aux livres en Irlande ?

Exercice 2.74

Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Exercice 2.75

Pour tenir le feu dans la cheminée pendant 5 heures, il faut 3 kg de bois. Combien de kg de bois faut-il pour tenir le feu pendant 24 heures ?

Exercice 2.76

Une voiture consomme 6 L d'essence pour 100 km. Combien de kilomètres peut-on parcourir avec un réservoir plein dont les dimensions sont 20 cm × 30 cm × 70 cm ?

Exercice 2.77

La distance entre New York et Los Angeles est 3950 km. Quelle sera cette distance sur une carte 1 ÷ 10 000 000 ?

Exercice 2.78

Une chambre a les dimensions 10 m par 15 m. Sur un plan de l'appartement, la longueur de la chambre est de 10 cm. Quelle sera sa largeur sur le plan, en cm ?

Exercice 2.79

La longueur de l'équateur de la Terre est de 40 000 km. Sur un globe d'école, l'équateur mesure 80 cm. À quelle échelle le globe a-t-il été réalisé ?

Exercice 2.80

Un épicier a compté par erreur un poids de 50 g au lieu d'un poids de 20 g dans une pesée qu'il a estimée à 375 g d'épices. Celles-ci coûtent 28 euro le kilo. Quelle somme a-t-il demandée en trop ?

Exercice 2.81

Le litre de bon lait pèse 1.030 kg. On achète 15 litres de lait qui pèsent 15.375 kg. Montrer que le lait n'est pas pur. Quelle quantité d'eau y a été mélangée ?

Exercice 2.82

Nina voudrait estimer la distance entre Paris et Berlin en consultant la carte dont l'échelle est indiquée comme 1 : 5 000 000. Elle mesure la distance avec une règle et obtient 21 cm. Quelle est la distance entre Paris et Berlin ?

Exercice 2.83

Si une bonbonne pleine de lait pèse 25 kg et que la même bonbonne à moitié pleine (ou à moitié vide selon votre conception de la vie...) pèse 13 kg, combien pèse la bonbonne vide ?

Exercice 2.84

Plusieurs métaux fondus ensemble constituent un alliage. Pour diverse raisons (dureté, couleur...), les bijoux dits en or ne sont jamais faits uniquement d'or. Par exemple, un bijou en or jaune est un alliage composé d'or pur, d'argent et de cuivre. Un bijou en or pesant 16 grammes contient 12 grammes d'or pur. En gardant la même proportion dans l'alliage, combien d'or pur contiendrait un bijou de 24 grammes ?

Exercice 2.85

Un pack «raquette + balle» coûte 1.10 €. Vous avez déjà une raquette et vous ne voulez acheter que la balle. Le vendeur ne se souvient plus du prix de la balle, mais il dit : «Je me souviens que la raquette coûte un euro de plus que la balle». Combien coûte la balle seule ?

Exercice 2.86

Paul et Marie ont acheté des pommes. Si Paul donne 5 de ses pommes à Marie, elle aura autant de pommes que lui. Si Marie donne 5 de ses pommes à Paul, il aura 5 fois plus de pommes qu'elle. Combien de pommes Paul et Marie ont-ils acheté ensemble ?

Exercice 2.87

Dans un panier de fruits, $1/7$ de tous les fruits sont des ananas, $3/8$ des pamplemousses et $2/5$ des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Exercice 2.88

1 →	2 →	3 ↗	4 ⇨	5 ↘	6 →	7 →	8 ↓	9 ⇨	10 ↗	11 ↔	12 ↗	13 ↗
14 ⇨	15 ↓	16 ↓	17 ↗	18 ⇨	19 ↗	20 ↗	21 ↘	22 ↗	23 ⇨	24 ↘	25 ↗	26 ←
27 ⇨	28 ↓	29 ↗	30 ↓	31 ↗	32 >	33 ⇨	34 ↗	35 >	36 ⇨	37 ⇨	38 ↘	39 →
40 ↗	41 ⇨	42 ↗	43 ↘	44 ↘	45 ⇨	46 ⇨	47 >	48 >	49 ↘	50 ←	51 ⇨	52 ↗
53 ↘	54 ⇨	55 ⇨	56 ⇨	57 >	58 >	59 ↘	60 ↓	61 ↗	62 >	63 ⇨	64 ↗	65 →
66 ⇨	67 ⇨	68 ↘	69 →	70 ↗	71 ↗	72 ⇨	73 ↗	74 ⇨	75 ↗	76 ↓	77 ↗	78 ⇨
79 ↗	80 ↗	81 ⇨	82 ←	83 ↗	84 ⇨	85 ↗	86 ↓	87 →	88 ↓	89 ⇨	90 ⇨	91 ↘
92 ↗	93 ↓	94 ↘	95 ↗	96 ↓	97 ⇨	98 ⇨	99 ⇨	100 ←	101 ↑	102 ↓	103 ⇨	104 ↗

1. Pense à un nombre de deux chiffres (par exemple : 78) ;
2. calcule la somme de ces deux chiffres (dans l'exemple : $7 + 8 = 15$) ;
3. soustraie cette somme au nombre initiale (dans l'exemple : $78 - 15 = 63$) ;
4. regarde quel symbole correspond au numéro obtenu (dans l'exemple : ⇨).

Montrer que, quel que soit le choix initial, le symbole obtenu est toujours ⇨.

Exercice 2.89

Le prix d'un carton est 5. Vous achetez un rectangle de 120 cm × 30 cm. Combien ça coûte ?

Exercice 2.90

André gagne 1500 € net par mois. Il en déduit un tiers pour son loyer, 10 € par jour pour les repas, 60 € pour ses frais de transport et une centaine d'euros pour des frais divers. Quel est le montant qui reste à la disposition d'André ? (Compter 30 jours par mois).

Exercice 2.91

Chez un boucher, un acheteur prend un kilo et demi de bœuf à 24 € le kilo, quatre côtes de porc, chacune pesant 100 g, à 11 € le kilo, et deux cailles à 3.5 € la pièce. Quel est le montant total des achats ?

Exercice 2.92

Il faut vider un chauffe-eau en forme de cylindre horizontal qui occupe un espace de 60 cm × 60 cm × 1 m. Si le chauffe-eau a été vidé en 1.5 h, quel est le débit du tuyau d'évacuation en $L \cdot min^{-1}$?

Exercice 2.93

Mes 4 perroquets bleus mangent 4 kg de graines en 4 jours. Mes 5 perroquets verts mangent 5 kg de graines en 5 jours. Mes 8 perroquets oranges mangent 8 kg de graines en 8 jours. Quels sont les perroquets qui ont le plus d'appétit ?



3

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

⚡ Exercice 3.1

★ Dire si les phrases suivantes sont des propositions ; si c'est le cas, écrire leur négation :

- ★ 1. $P =$ "toute personne dans cette salle possède un téléphone portable"
- ★ 2. $Q =$ "pour tout x dans \mathbb{R} , il existe y dans \mathbb{R} tel que $x = 2y$ "

⚡ Exercice 3.2

★ Écrire les tables de vérité suivantes :

- ★ 1. "non(P) et Q "
- ★ 2. "non(P et Q)"
- ★ 3. "(non(P)) ou (non(Q))"
- ★ 4. "(non(P)) ou Q "

⚡ Exercice 3.3

Pour chaque proposition, écrire la négation et la contraposée (on ne demande pas de prouver la véracité) :

- 1. $x > 3 \implies x > 2$
- 2. $x = 3 \implies x^2 = 9$
- 3. Si on est en décembre alors les vacances de Noël sont proches.

⚡ Exercice 3.4

Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

- 1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
- 2. Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.
- 3. Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.
- 4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
- 5. Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs.
- 6. Paris est en France ou Madrid est en Chine.
- 7. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
- 8. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.
- 9. $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 4)$
- 10. $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$
- 11. $(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$
- 12. $(2 < 3)$ et $\neg(2 \text{ divise } 5)$
- 13. $\neg(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$
- 14. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$

Attention : la proposition "soit P soit Q " doit être interprété comme $P \vee Q$ (dans le langage courant il y a ambiguïté car la proposition "soit P soit Q " peut se traduire par un "ou" exclusif au lieu du "ou" logique).

Exercice 3.5

Soient les propositions définies par $P(x) = "x \leq 1"$ et $Q(x) = "x \geq 2"$. Donner les valeurs de x dans \mathbb{R} pour lesquelles

1. " $P \wedge Q$ " est vraie
2. " $P \wedge Q$ " est fausse
3. " $P \vee Q$ " est vraie
4. " $P \vee Q$ " est fausse

Exercice 3.6

★ La relation $p \implies q$ se lit "si p , alors q ". Que signifie-t-elle ?

- ★ p est une condition suffisante de q pour que p , il est nécessaire que q
- ★ q est une condition nécessaire de p p seulement si q
- ★ pour que q , il suffit que p q seulement si p
- ★ pour que p , il suffit que q

Exercice 3.7

1. "4 divise n " est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n " ?
2. "3 divise n " est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n " ?

Exercice 3.8

On considère la proposition \mathcal{I} suivante :

$\mathcal{I} =$ "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition \mathcal{I} .
2. Écrire la négation de la proposition \mathcal{I} .
3. Écrire la réciproque de la proposition \mathcal{I} .

Exercice 3.9

S'il pleut, Jean va au travail en bus. Hier Jean est allé au travail à vélo. Est-il possible d'établir avec certitude si hier il a plu ? Ce matin Jean est allé au travail en bus. Est-il possible d'établir avec certitude si ce matin il pleuvait ?

**Exercice 3.10**

★ Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.»

★ Franchiriez-vous cette porte ?

**Exercice 3.11 T. CHAMPION**

On considère la proposition suivante :

"Si le TP de Chimie a commencé alors tous les étudiants ont mis leur blouse."

1. Écrire la contraposée et la négation de la proposition.
2. Si la proposition est vraie et on constate que tous les étudiants ont mis leur blouse, peut-on déduire que le TP a commencé ?

Exercice 3.12 T. CHAMPION

On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

"Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 3.13 T. CHAMPION

On effectue une expérience chimique pour laquelle on peut seulement faire varier la température ou ajouter un catalyseur. On connaît le principe suivant :

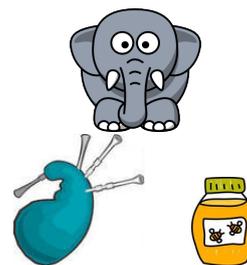
“Si on augmente la température de 10 degrés et si on n’ajoute pas de catalyseur alors la réaction va deux fois plus vite que normalement.”

1. Écrire la contraposée du principe ci-dessus, c’est-à-dire compléter la phrase “Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors...”.
2. On observe que la température a augmenté de 10 degrés et que la réaction va 3 fois plus vite que normalement, que peut-on en déduire ?
3. On observe que la réaction va 2 fois plus vite que normalement, peut-on en déduire quelque chose sur la variation de température ?

Exercice 3.14 T. CHAMPION

On considère les propositions suivantes

1. “les éléphants portent toujours des pantalons courts” ;
2. “si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse” ;
3. “si un animal est facile à avaler alors il mange du miel” ;
4. “si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse”.



On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu’un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 3.15

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R} . Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend ses valeurs entre -2 et 3
4. f ne prend que des valeurs entières
5. f s’annule au moins une fois sur l’intervalle $[-1, 1[$

Exercice 3.16

★ Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l’énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l’aide d’une démonstration).

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$ | 5. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$ |
| 2. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ | 6. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 \leq n^3$ |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ | 7. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq x$ |
| 4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ | 8. $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (n > p \implies n + p > 2p)$ |

Exercice 3.17

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \quad \text{«si } x = 3 \text{ alors } y = 5 \text{ et } z = 1\text{»}.$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fautive :

1. (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$ ».
2. (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$ ».
3. (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$ ».
4. La négation de (P) est « $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ ».
5. La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ ».

Exercice 3.18

Pour tout entier naturel n , soit P_n une assertion portant sur n et telle que si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est également. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit faux. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

- P_{n_0-1} est faux
- P_n est faux pour tout entier $n \leq n_0$
- P_{n_0+1} est faux
- P_n est faux pour tout entier $n \geq n_0$
- P_n est faux pour tout entier n

On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit vrai. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

- P_{n_0-1} est vrai
- P_n est vrai pour tout entier $n \leq n_0$
- P_{n_0+1} vrai faux
- P_n est vrai pour tout entier $n \geq n_0$
- P_n est vrai pour tout entier n

Exercice 3.19

Démontrer (par récurrence) les propositions

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \\
 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n (2i+1) = n(n+2), \\
 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
 4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2, \\
 5) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},
 \end{array}$$

Exercice 3.20

Montrer que l'assertion suivante est vraie (n désigne un nombre entier, i.e. $n \in \mathbb{Z}$) : " n^2 impair $\implies n$ impair". Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 3.21

Montrer que l'assertion suivante est vraie (p et q désignent un nombre naturel, i.e. $p, q \in \mathbb{N}$) : " $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2} \implies p \neq q$ ".

Exercice 3.22

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que l'assertion suivante est vraie : "Dans $a^2 + b^2 = c^2$ il y a toujours au moins un des trois nombres, a , b ou c qui est pair".

Triplets pythagoriciens

Voici une méthode astucieuse pour produire des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des triplets de nombres entiers non-nuls qui satisfont la relation $a^2 + b^2 = c^2$. On choisit deux nombres entiers strictement positifs et on appelle le plus grand de ces deux nombres x et l'autre, le plus petit, y . On pose $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$ et $c = x^2 + y^2$. On obtient ainsi un triplet pythagorien. En effet, on observe que

$$a^2 + b^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = c^2.$$

Exercice 3.23

Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\begin{array}{llll}
 \bigcup_{x \in [0,1]} \left] \frac{x}{2}, 2x \right[& \bigcap_{x \in [0,1]} \left] \frac{x}{2}, 2x \right[& \bigcup_{x \in [0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x \right] & \bigcap_{x \in [0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x \right] \\
 \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right[& \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right] & \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2} \right[& \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2 \right]
 \end{array}$$

Exercice 3.24

Soit E, I, J trois ensembles et $\{A_i\}_{i \in I}$ et $\{B_j\}_{j \in J}$ deux parties de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

◆ Exercice 3.25

Soit E, I et J trois ensembles non vides. Soit $\{A_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_{i,j} \right) \subset \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right),$$

puis comparer (en terme d'inclusion)

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] \right) \quad \text{et} \quad \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] \right)$$

◆ Exercice 3.26

★ Soient E un ensemble et F et G deux parties de E . Montrer que

- ★ 1) $C_E(C_E F) = F$
- ★ 2) $F \subset G \iff C_E F \supset C_E G$
- ★ 3) $C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G)$ et $C_E(F \cap G) = (C_E F) \cup (C_E G)$

[Lois de Morgan]

◆ Exercice 3.27

Soit I un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_E A_i$
2. $C_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_E A_i$.



4

Relations, fonctions, applications

Exercice 4.1

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . On dit que f est **injective** si et seulement si...”

- tout élément x de E n'a qu'une image par f
- tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- pour tous x et y de E , la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

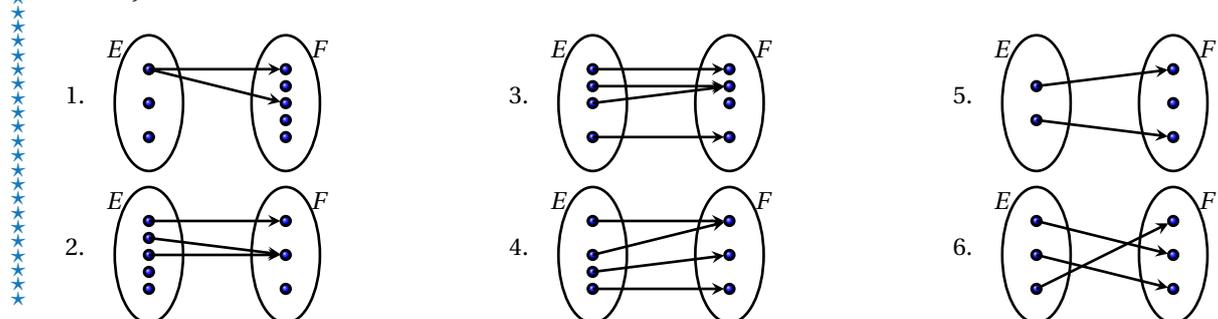
Exercice 4.2

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . On dit que f est **surjective** si et seulement si...”

- tout élément x de E n'a qu'une image par f
- tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- pour tous x et y de E , la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

Exercice 4.3

Soit E et F deux ensembles. Pour chaque relation $x\mathcal{R}y$ avec $x \in E$ et $y \in F$ déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions, puis celles qui sont des applications et si elles sont injectives et/ou surjectives.



Exercice 4.4

On note $E := \{1, 2, 3\}$ et $F := \{1, 2, 3, 4\}$. Tracer le graphe des six relations binaires de E dans F définies ci-dessous.

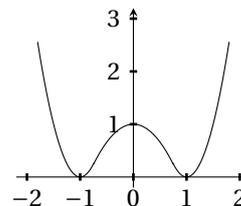
1. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_1 y \iff x - y + 3 \geq 0,$
2. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_2 y \iff x + 1 \geq y,$
3. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_3 y \iff x \geq y,$
4. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_4 y \iff x - y + 2 = 0,$
5. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_5 y \iff y$ est pair,
6. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_6 y \iff x = y.$

Parmi les six relations ci-dessus, déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions. L'une de ces fonction est-elle une application ?

Exercice 4.5

On considère l'application f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y , le nombre d'antécédents de y par f .
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?



Exercice 4.6

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 4.7

Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 4.8

Soit E et F deux parties de \mathbb{R} et \mathcal{R} la relation binaire de E dans F définie par

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 + y^2 = 1.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors \mathcal{R} n'est pas une fonction.
2. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [0, +\infty[$ alors \mathcal{R} est une fonction dont on déterminera le domaine de définition D . Pour tout $(x, y) \in D \times F$ tel que $x \mathcal{R} y$, expliciter y en fonction de x .
3. Montrer que si $E = [-1, +1]$ et $F = [0, +\infty[$ alors \mathcal{R} est une application qui n'est ni injective ni surjective.

Exercice 4.9

Déterminer le nombre de fonctions (applications, injections, surjections, bijections) de E dans F dans chacun des cas suivants.

1. $E = \{1\}$ et $F = \{1\}$,
2. $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$,
3. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2\}$,
4. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

Exercice 4.10

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

- (a) f est injective
- (b) pour tout A, B sous-ensembles de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4.11

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F .

1. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de E . Montrer que

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j \in J}$ une famille de parties de F . Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 4.12

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
6. $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
7. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
9. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
10. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Exercice 4.13

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(|x| + \frac{1}{e})$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g:]0, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h .

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Exercice 4.14

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(x^2 + \frac{1}{e})$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g:]0, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h .

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Exercice 4.15

1. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$.
 - 1.1. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 1.2. Soit $g:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $g(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 1.3. Soit $h: [2; +\infty[\rightarrow]0; 1[$ l'application telle que $h(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
2. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$.
 - 2.1. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 2.2. Soit $g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $g(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 2.3. Soit $h: [0; +\infty[\rightarrow]0; 1[$ la fonction telle que $h(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?

Prouver chaque affirmation.

Exercice 4.16

1. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans \mathbb{R} définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 4.17 composition, réciprocity

1. Soient f, g les deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Soient les applications f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définies par $f(x, y) = 2x + 3y + 1$ et $g(t) = (t, 2t - 1)$. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Montrer que $f \circ g$ admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que $g \circ f$ n'en admet pas.
3. Soient les applications f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 , g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et h de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définies par $f(x, y, z) = (2x, y + z)$, $g(u, v) = v - u$ et $h(t) = (3t + 1, 2t)$. Calculer $h \circ g$ puis $h \circ (g \circ f)$.
4. Soit les applications f de \mathbb{R} dans $] -1, +1[$ et g de $] -1, +1[$ dans \mathbb{R} définies par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $g(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 4.18 *réciprocité*

1. Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = 1 + x + x^2$ admet-elle une application réciproque ?
4. L'application f de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 4.19 *composition, injection, surjection*

Démontrer que

1. la composée de deux injections est une injection,
2. la composée de deux surjections est une surjection,
3. la composée de deux bijections est une bijection,
4. si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective,
5. si la composition $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 4.20

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$$A = [0, 1]$$

$$B =]-1, 4[$$

$$C = [0, +\infty[$$

$$D =]-\infty, 5]$$

Exercice 4.21

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2, 1]$ et $B := [-1, 4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(A))$ puis comparer ces deux ensembles et A .

Exercice 4.22

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F . Montrer que

1. $\forall A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) \subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 4.23

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = 2 + x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
 - 1.1. Montrer que f est une application.
 - 1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
 - 1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.
 - 2.1. Montrer que f est une application bijective.
 - 2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f .

Exercice 4.24

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = -x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
 - 1.1. Montrer que f est une application.
 - 1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
 - 1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F =]-\infty, 0]$.
 - 2.1. Montrer que f est une application bijective.
 - 2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f .

Exercice 4.25

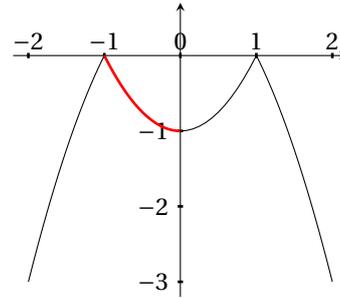
Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = 1 - x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
 - 1.1. Montrer que f est une application.
 - 1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
 - 1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E = [0, +\infty[$ et $F =]-\infty, 1]$.
 - 2.1. Montrer que f est une application bijective.
 - 2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f .

Exercice 4.26

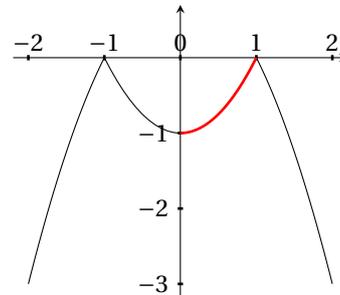
Après avoir rappelé la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs), considérons l'application f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Soit g l'application définie de $] -1; 0]$ dans $[-1; 0]$ par $g(x) = f(x)$.
 g est-elle injective? g est-elle surjective?
2. Soit h l'application définie de $] -1; 0]$ dans $[-1; 0[$ par $h(x) = f(x)$.
Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h .

**Exercice 4.27**

Après avoir rappelé la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs), considérons l'application f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Soit g l'application définie de $[0; 1[$ dans $[-1; 0]$ par $g(x) = f(x)$. g est-elle injective? g est-elle surjective?
2. Soit h l'application définie de $[0; 1[$ dans $[-1; 0[$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h .

**Exercice 4.28**

Calculer

$$\sup_{x \in [0, 3/2]} (x-1)^2$$

$$\inf_{x \in [0, 3/2]} (x-1)^2$$

$$\sup_{x \in [1, 2]} \frac{1}{x}$$

$$\sup_{x \in [1, 2]} \frac{1}{x}$$

$$\sup_{x > 0} \frac{1}{x}$$

$$\inf_{x > 0} \frac{1}{x}$$

Exercice 4.29

Soit \mathcal{S} le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par

$$\mathcal{S} :=] -2, -1[\cup] 0, \frac{1}{2} [.$$

Calculer inf et sup de chacun des ensembles suivants en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

$$\mathcal{A} := \left\{ \log_{10} \left| \frac{x}{y} \right| : x, y \in \mathcal{S} \right\},$$

$$\mathcal{B} := \{ 2^{xy} : x, y \in \mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{C} := \{ 2^{x/y} : x, y \in \mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{D} := \{ \sin(x+y) : x, y \in \mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{E} := \{ \cos(x+y) : x, y \in \mathcal{S} \}.$$

Exercice 4.30

Soit \mathcal{S} le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par

$$\mathcal{S} := [-1, 0[\cup]1, 2[.$$

Calculer $\inf_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y)$ et $\sup_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y)$ de chacune des fonctions suivantes en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1. $f(x,y) = x \log_{10} y $ | 3. $f(x,y) = \cos(xy)$ |
| 2. $f(x,y) = \sin(xy)$ | 4. $f(x,y) = e^{-x} + (y-3/2)^2$ |

Exercice 4.31

Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$$A_1 = \{1, 2, 3, 5, 12\}$$

$$A_4 = \{3 + 7q : q \in \mathbb{N}\}$$

$$A_7 = \{p/3^n : p, n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$A_2 = \mathbb{N}$$

$$A_5 = \{3 - 7q : q \in \mathbb{N}\}$$

$$A_8 = \mathbb{R}$$

$$A_3 = \mathbb{Z}$$

$$A_6 = \{p/3^n : p, n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_9 =]5, 6[$$

Exercice 4.32

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Trouver $f(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 4.33

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2, 1]$. Trouver

- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(A)$, | 3. $\sup_A f$ (est-il maximum ?), |
| 2. $f^{-1}(f(A))$, | 4. $\inf_A f$ (est-il minimum ?). |

Exercice 4.34

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2, 1]$. Trouver

- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(A)$, | 3. $\sup_A f$ (est-il maximum ?), |
| 2. $f^{-1}(f(A))$, | 4. $\inf_A f$ (est-il minimum ?). |

Exercice 4.35

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - x^2$. Soit $B = [-3, 1]$. Trouver

- | | |
|---------------------|--|
| 1. $f^{-1}(B)$, | 3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?), |
| 2. $f(f^{-1}(B))$, | 4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?). |

Exercice 4.36

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x-1)^2$. Soit $B = [-1; 1[$. Trouver

- | | |
|---------------------|--|
| 1. $f^{-1}(B)$, | 3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?), |
| 2. $f(f^{-1}(B))$, | 4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?). |

Exercice 4.37

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x+1)^2$. Soit $B = [-1; 1[$. Trouver

- | | |
|---------------------|--|
| 1. $f^{-1}(B)$, | 3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?), |
| 2. $f(f^{-1}(B))$, | 4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?). |

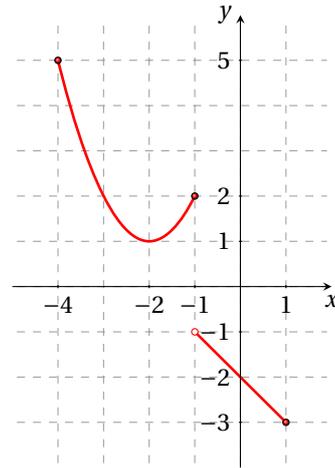
Exercice 4.38

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & \text{si } x \leq -1, \\ -x - 2 & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

et représentée ci-contre. Soit $A = [-4, 1]$. Trouver

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}(f(A))$,
3. $f^{-1}(A)$,
4. $f(f^{-1}(A))$.

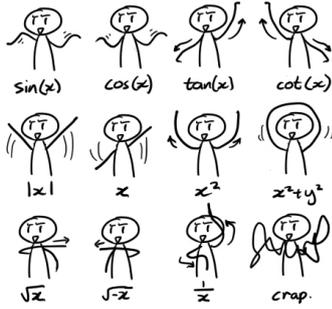


Exercice 4.39

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $f: [a; b] \rightarrow [c; d]$ la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f ne soit ni une application injective ni une application surjective.
2. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f soit une application surjective mais ne soit pas une application injective.
3. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f soit une application injective mais ne soit pas une application surjective.
4. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f soit une application bijective.
5. Calculer l'image directe de $[-2; 1[$ par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
6. Calculer l'image réciproque de $[-2; 1[$ par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Beautiful Dance Moves



5

Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition

★ Exercice 5.1

★ On considère les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u: x \mapsto 2x - 8$ et $v: x \mapsto x^2$.

- ★ 1. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.
- ★ 2. Donner les variations des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ sans dériver.

◆ Exercice 5.2

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$f_1(x) = e^x - x^2,$	$f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 5x + 7},$	$f_3(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1},$
$f_4(x) = \sqrt{x^2 + x + 1},$	$f_5(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x,$	$f_6(x) = \frac{\ln(x^2 + 2)}{2x},$
$f_7(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x},$	$f_8(x) = \frac{e^{3x}}{x^2 + e^x},$	$f_9(x) = \ln(x) - x,$
$f_{10}(x) = \frac{1}{x^x},$	$f_{11}(x) = x^{1/x},$	$f_{12}(x) = x^3 \ln(x),$
$f_{13}(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1},$	$f_{14}(x) = \sqrt{x^2},$	$f_{15}(x) = (\sqrt{x})^2.$

◆ Exercice 5.3

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$	$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto \ln(e^x)$	$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto e^{\ln(x)}$	$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto \frac{1-x}{1-x^2}$	$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto \sqrt{ x }$	$f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto \ln(x)$
--	---	---	--	---	---

Exercice 5.4

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^5 - 3x^2 + 2x - 7$

2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

3. $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$

4. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

5. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

6. $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

7. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

8. $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$

9. $x \mapsto \sqrt{x^2-3x-4}$

10. $x \mapsto \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

11. $x \mapsto \ln(1-x)$

12. $x \mapsto \ln(1-x^2)$

13. $x \mapsto |\ln(x)|$

14. $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

15. $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$

16. $x \mapsto \tan(2x)$

17. $x \mapsto \frac{1}{\sin(2x)}$

18. $x \mapsto \frac{1}{x \cos(x)}$

19. $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}$

20. $x \mapsto \left(\frac{x^2-2x}{x^2+4x+3} \right)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

21. $x \mapsto \sqrt{3 - \log_2(x+5)}$.

Exercice 5.5

Considérons les fonctions

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition : $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ h$, $u \circ v$, $v \circ u$, $u \circ v \circ w$.

Parité et périodicité**Exercice 5.6**

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x) = x^2 - 1 + \sin^2(x), \quad f_2(x) = \frac{\tan(x) - x}{x^3 \cos(x)}, \quad f_3(x) = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan(x)}, \quad f_4(x) = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos(x).$$

Exercice 5.7

Le produit de deux fonctions paires est-il pair ? Et le produit de deux fonctions impaires ?

Exercice 5.8

Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(3x),$$

$$f_2(x) = \sqrt{\tan(x)},$$

$$f_3(x) = \cos^4(8x),$$

$$f_4(x) = |\cos(5x)|,$$

$$f_5(x) = \cos(3x) + \sin(2x),$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)},$$

$$f_7(x) = \cos(5x) \sin(3x),$$

$$f_8(x) = \cos(3x) \sin(3x).$$

Fonctions usuelles et graphes**Exercice 5.9**

Pour chaque fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x) = x^2$

7. $f(x) = \ln(x)$

13. $f(x) = \cos(x)$

19. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = 1 - x^2$

8. $f(x) = \ln(-x)$

14. $f(x) = \cos(2x)$

20. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

3. $f(x) = -2(x+1)^2$

9. $f(x) = \ln(x-1)$

15. $f(x) = 1 + \cos(2x)$

21. $f(x) = \frac{1}{2x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$

10. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = |x|$

5. $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

11. $f(x) = e^{x-1}$

17. $f(x) = |-x|$

6. $f(x) = \sqrt{3x-1}$

12. $f(x) = e^{-x}$

18. $f(x) = -|x|$

Exercice 5.10

Soit $f: x \mapsto |x - 3| - |2x + 1|$ définie sur \mathbb{R} . Simplifier en fonction de x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 5.11

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

- | | | | |
|------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1. $x \mapsto f(x)$, | 3. $x \mapsto f(x) + 2$, | 5. $x \mapsto f(x - 1)$, | 7. $x \mapsto f(x) $. |
| 2. $x \mapsto -f(x)$, | 4. $x \mapsto f(2x)$, | 6. $x \mapsto f(x)$, | |

Exercice 5.12

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

$f: x \mapsto x$,	$g: x \mapsto \sqrt{x}$,	$h: x \mapsto x^2$,	$u: x \mapsto \frac{1}{x}$	$w: x \mapsto \sqrt{x^2}$.
--------------------	---------------------------	----------------------	----------------------------	-----------------------------

Exercice 5.13

Donner les tableaux de variations des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} :

$f: x \mapsto -5x^2$,	$g: x \mapsto x^2 - 4$,	$h: x \mapsto 0.5x^2 + 2$.
------------------------	--------------------------	-----------------------------

Exercice 5.14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 8} - \sqrt{x^2 - 1}$. Donner son ensemble de définition \mathcal{D}_f et étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 5.15

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = 2x$, $g(x) = 12x$, $h(x) = 2x + 12$.

Exercice 5.16

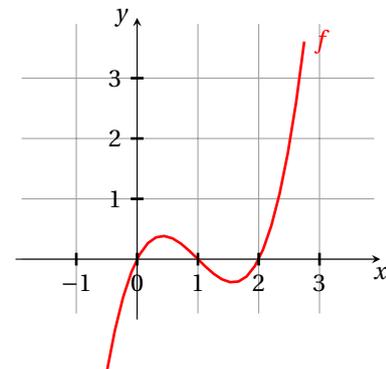
Une fonction affine prend la valeur H au point r et son graphe passe par l'origine. Quelle est son équation ?

Exercice 5.17

Tracer le graphe des fonctions définies par $f(x) = m(x - a) + b$ pour différentes valeurs de a , m et b . Identifier ces trois paramètres sur un graphe général.

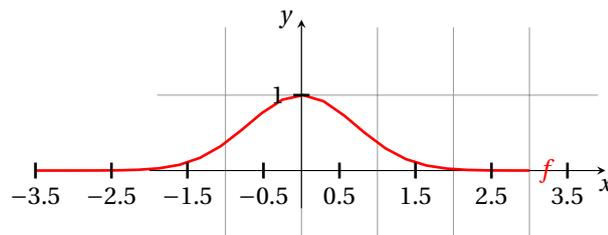
Exercice 5.18

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x) + 3$, $f(x) - 3$, $f(x + 3)$, $f(x - 3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$, $f(x)/3$.



Exercice 5.19

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x) + 3$, $f(x) - 3$, $f(x + 3)$, $f(x - 3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$, $f(x)/3$.



Exercice 5.20

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 2)^2$, $h(x) = (x + 2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Exercice 5.21

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x} + 2$, $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$, $f_4(x) = \frac{1}{x-2}$, $f_5(x) = 2\frac{1}{x}$, $f_6(x) = \frac{1}{2x}$, $f_7(x) = \frac{1}{x-3} + 2$, $f_8(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

Exercice 5.22

Tracer dans le même repère le graphe des fonctions définies par $f(x) = \frac{3+2x}{7+5x}$, $g(x) = 3 + \frac{3+2x}{7+5x}$.

Exercice 5.23

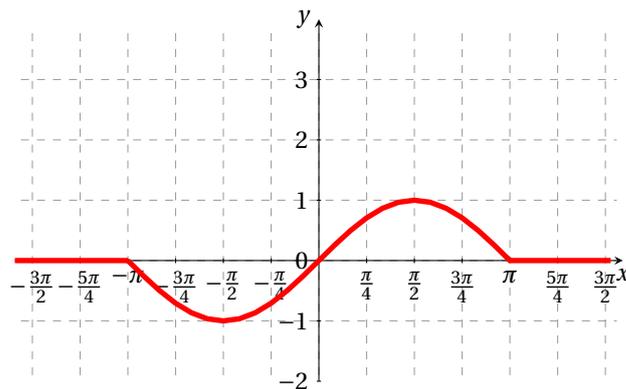
Tracer le graphe de la fonction définie par $H(r) = \frac{r-\delta}{2r-3}$ où δ est une constante. Discuter les cas en fonction de δ .

Exercice 5.24

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



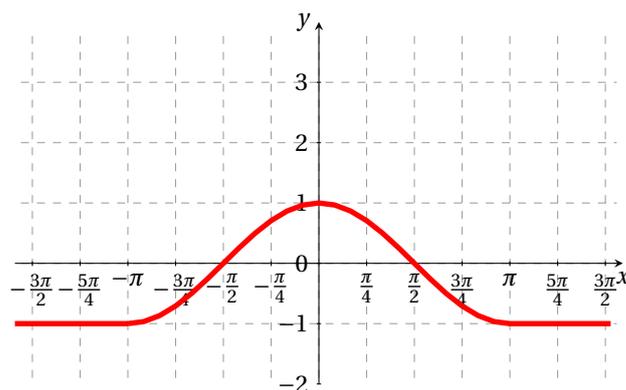
Suggestion : utiliser les transformations élémentaires $f_1(x) = f(2x)$, $f_2(x) = f_1\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x) = 2f_2(x) = 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $g(x) = 1 + f_3(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 5.25

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [-\pi; \pi], \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Suggestion : utiliser les transformations élémentaires $f_1(x) = f(2x)$, $f_2(x) = f_1\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x) = 2f_2(x) = 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $g(x) = 1 + f_3(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 5.26

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{ax+3}{x+1}$ pour différentes valeurs de a .

Exercice 5.27

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 5.28

Tracer le graphe des fonctions définies par $f(x) = 4(1 - \cos(x))$, $g(x) = -2\cos(5x - 6)$.

Exercice 5.29

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$, $f_3(x) = \sin(2x + \pi)$, $f_4(x) = 4\sin(2x + \pi)$, $f_5(x) = 3 + 4\sin(2x + \pi)$.

Exercice 5.30

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = \log_a(x)$ pour $a = e$, $a = 1/e$, $a = 10$.

Exercice 5.31

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = -e^{-x}$ et $f_4(x) = 1 - e^{-x}$.

Exercice 5.32

Compléter le tableau

$f(x)$	$g(x)$	$g(f(x))$
$x - 7$	\sqrt{x}	
$x + 2$	$3x$	
	$\sqrt{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
	$1 + \frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Exercice 5.33 Échelles de température

Une température de 32°F correspondent à 0°C tandis que 100°C correspondent à 212°F . Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ?

Exercice 5.34 Inclinaison et panneaux routiers

Les panneaux routiers indiquent les inclinaisons des routes au moyen de pourcentages. Une route dont l'inclinaison est de 7.5% est une route pour laquelle l'altitude augmente ou diminue de 7.5 m lorsque on se déplace horizontalement de 100 m. Sur autoroute, l'inclinaison maximale est de 5%. À quelle angle cette inclinaison correspond-t-elle ?

Exercice 5.35

Une route fait un angle de 11° avec l'horizontale. Quelle distance a-t-on parcouru lorsqu'on se trouve 100 m plus haut que le point de départ ?

Exercice 5.36

Un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est inscrit dans un cône de hauteur H et de rayon R . Exprimer H en fonction de r , h et R .

Exercice 5.37

Un réseau de mobilphonie annonce ses tarifs :

Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.

Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.

Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.

Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone 45 minutes par mois en moyenne ? Et de manière générale ?

Exercice 5.38 Gas parfaits

D'après la loi de BOYLE-MARIOTTE pour les gaz parfaits, la pression P , le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Exercice 5.39

La concentration C d'un réactif d'une réaction chimique de second ordre est donnée par $C(t) = \frac{C_0}{1 + kC_0t}$ où C_0 est la concentration initiale et $k > 0$ est une constante cinétique chimique. Tracez le graphe de la fonction $C: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ pour différentes valeurs de k .

Exercice 5.40

Dans une solution à 25°C , la liaison entre la concentration en ions OH^- et celle en ions H^+ est donnée par $[\text{OH}^-][\text{H}^+] = 10^{-14}$. Représenter une de ces deux concentrations en fonction de l'autre.

💡 Exercice 5.41

★ D'après MICHAELIS et MENTEN, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S] + K_m}$$

★ où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de MICHAELIS-MENTEN spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

💡 Exercice 5.42

★ La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T . Exprimer P en fonction de T .

📐 Exercice 5.43

Quel volume d'air faut-il insuffler dans un ballon sphérique pour que son rayon passe de R à $R + 1$?

📐 Exercice 5.44

Une tour de contrôle d'une hauteur de 10 m se situe à 100 m d'une piste d'envol. Exprimer la distance entre un avion sur la piste et le sommet de la tour de contrôle en fonction de la position de l'avion.

📐 Exercice 5.45

Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

📐 Exercice 5.46

Un observateur situé à une hauteur de h mètres du niveau de la mer observe l'horizon. Quel est le point le plus distant qu'il découvre si la Terre est parfaitement sphérique et l'équateur mesure 40 000 km ? La plus courte distance entre la côte de la France et celle de la Grande-Bretagne est de 17 km. À quelle hauteur faut-il se placer pour découvrir la côte anglaise ?

📐 Exercice 5.47

D'après la loi de TORRICELLI, si on perce un trou à la base d'une colonne d'eau d'une hauteur h m, l'eau s'échappe à une vitesse de $\sqrt{2gh} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ où $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Faire une représentation de l'évolution de $2gh$ en fonction de la vitesse de l'écoulement. Trouver la réciproque de cette fonction et tracer son graphe. Comment évolue la vitesse lorsque la hauteur est multipliée par deux ?

📐 Exercice 5.48

Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité ($=9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

📐 Exercice 5.49

L'intensité de certaines étoiles varie en manière sinusoïdale. L'intensité d'une de ces étoiles possède une période de 5.4 jours et une intensité qui varie entre $4 + 0.35$ et $4 - 0.35$. Trouver une expression pour l'intensité en fonction du temps.

📐 Exercice 5.50

Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

📐 Exercice 5.51

Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi $M(t) = M_0 \exp(-0.000436t)$, où M_0 représente la masse de radium présente au temps $t = 0$ et t est donné en années. Tracer le graphe de la fonction M . Au départ de $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse se réduise de moitié ? Et au départ de $t = 10$?

📐 Exercice 5.52

L'évolution de la population mondiale P durant le XX^e siècle peut être approchée au moyen d'une fonction exponentielle par

$$P(t) = 0.0083 \times (1.0137)^t$$

où t désigne l'année considérée. Quand la population dépassera-t-elle 7 milliards d'habitants ? Soit $t = 1900$; combien de temps faut-il attendre pour que la population double ? Même question en $t = 2000$.

◆ **Exercice 5.53**

L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k .

◆ **Exercice 5.54**

La vitesse v d'une masse m soumise à la pesanteur et à une force de frottement directement proportionnelle à v est donné par

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + Ke^{-\mu t/m},$$

où m , g et μ sont des constantes positives. Déterminer la valeur de K pour laquelle $v(0) = v_0$ et tracer le graphe de la fonction $t \rightarrow v(t)$.

💡 **Exercice 5.55**

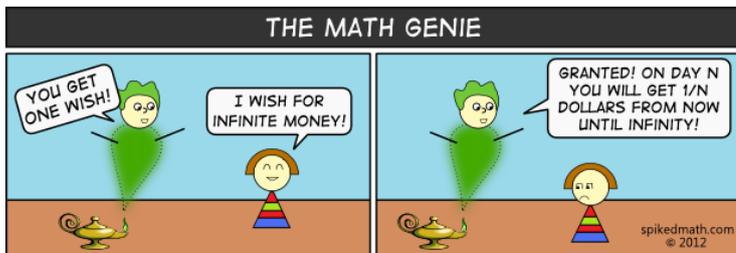
★ Le mathématicien P.F. VERHULST a proposé au XIX^e siècle un modèle de croissance de population. Dans ce modèle, la population P au temps t est donnée par

$$P(t) = P_{\max} \frac{\exp(rP_{\max}t)}{K + \exp(rP_{\max}t)}$$

★ où P_{\max} est la population maximale et r et K sont des constantes positives. Simplifier l'expression et tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs des constantes.

💡 **Exercice 5.56**

★ Le rayon d'une sphère est multiplié par deux; comment évolue son volume? Comment évolue le volume d'un cube dont la longueur des côtés est multipliée par deux?



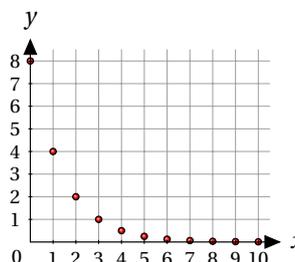
6

Suites numériques et limites

Exercice 6.1 Lecture graphique, suite géométrique

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.

- Déterminer graphiquement u_0 , u_1 , et u_2 .
- En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
- Exprimer u_n en fonction de n .
- En déduire la valeur de u_{10} .
- Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.



Exercice 6.2 Pression atmosphérique, suite géométrique

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n) .

- Déterminer les pressions P_0 , P_1 , et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
- Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n + 100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
- Donner le terme général de la suite (P_n) .
- Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
- Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Exercice 6.3 Suite géométrique

Une population microbienne voit son effectif augmenter d'à peu près 10% toutes les heures. Sachant qu'elle comporte 200 individus au moment où nous l'observons, qu'en sera-t-il au bout de 24 heures? Au bout de n heures (où n est un entier naturel)?

Exercice 6.4 Suite arithmétique

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13 200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11 600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995 + n)$ et on considère la suite (v_n) .

- Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
- Quel était le prix initial de vente en 1995?
- À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 €?
- De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 6.5

Le nénuphar glouton Un nénuphar vit paisible dans sa mare et double de taille tous les jours. Au 50^{ème} jour de son existence, il a déjà recouvert la moitié de sa mare, combien de temps va-t-il mettre pour recouvrir la totalité de la mare?

Exercice 6.6

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + n^2 + 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 1},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n) + 2}{n + 3},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n^3 + 1}.$$

Exercice 6.7

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right) \right),$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{n}} \right),$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right) \right),$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left((-1)^n - \cos \frac{1}{n} \right),$$

$$e) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin\left(\frac{2}{n}\right) \right),$$

$$f) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{2}{\sqrt{n}} \right),$$

$$g) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n} \sin\left(\frac{2}{n}\right) \right),$$

$$h) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{(-1)^n}{n} \right),$$

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n,$$

$$j) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^n,$$

$$k) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\sqrt{n}},$$

$$l) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^n,$$

$$m) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{4n},$$

$$n) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\tan\left(\frac{3}{n}\right) - \sin\left(\frac{3}{n}\right) \right),$$

$$o) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n},$$

$$p) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}},$$

$$q) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

Exercice 6.8

Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{(\sqrt{n} - 3)(2 - 3\sqrt{n})}.$$

Exercice 6.9 Série harmonique

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, diverge vers $+\infty$.

Exercice 6.10

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $x_n := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k} \right)$, est convergente ;

Exercice 6.11

Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général u_n :

$$1. \sqrt{n^5 + 3n} - n$$

$$3. \frac{\sin^5(\sqrt{n})}{n^2}$$

$$5. \left(1 - \frac{e}{n} \right)^n$$

$$2. n - \sqrt{n^3 - 3n}$$

$$4. \left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^n$$

$$6. \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2} \right)^n, a \text{ réel quelconque}$$

Exercice 6.12

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a) u_n > \ln n$$

$$b) \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

$$c) u_n \nearrow \text{ et } u_n < 1 + \frac{1}{n}$$

$$d) u_n = \sqrt[n]{n}$$

$$e) u_n = \ln n + \sin(n)$$

$$f) u_n = \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$g) u_n = \frac{n}{e} + \frac{1}{e^n}$$

$$h) u_n = \frac{n}{n+1} \ln n$$

$$i) u_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$j) u_n = \frac{(2n)!}{n!}$$

$$k) u_n = \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}$$

$$l) u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n - (-1)^n}$$

$$m) u_n = (n^2 + n + 1)^{1/n}$$

$$n) u_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$o) u_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$p) u_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}$$

$$q) u_n = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)$$

$$r) u_n = \frac{2n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 1}$$

$$s) u_n = (-1)^n \frac{4n-1}{2n+3}$$

$$t) u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1}$$

$$u) u_n = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$v) u_n = \frac{n^2 + 1}{2n\sqrt{n} + 1}$$

$$w) u_n = (-1)^n \frac{6n+3}{2n-1}$$

Exercice 6.13

Étudier le comportement des suites

$$a_n = \frac{\cos(n)}{e^{3n+1}} \quad \text{et} \quad b_n = \left(e^{-4n} + \frac{1}{n} \right) (\sin(n))$$

💡 Exercice 6.14

★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

- | | |
|--|---|
| ★ (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$ | (a) “La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$.” |
| ★ (2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$ | (b) “La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$.” |
| ★ (3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$ | (c) “La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est pas bornée supérieurement” |
| ★ (4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$ | (d) “La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M .” |

🔍 Exercice 6.15

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Que signifient les assertions suivantes ?

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$ | 3. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$ |
| 2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ | 4. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ |

💡 Exercice 6.16

★ Vrai ou faux ?

- ★ 1. Si une suite $(|u_n|)$ est majorée, la suite (u_n) est bornée.
- ★ 2. Si une suite $(|u_n|)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge vers 0.
- ★ 3. Si une suite (u_n) converge vers ℓ et si elle est à termes strictement positif, alors $\ell > 0$.
- ★ 4. Si une suite (u_n) converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 quelque soit la suite (v_n) .
- ★ 5. Si $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont deux suites convergentes, la suite $(|u_n + v_n|)$ est aussi convergente.
- ★ 6. Si la suite $(|u_n + v_n|)$ est convergente alors les deux suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont aussi convergentes.
- ★ 7. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu’à partir d’un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n) .
- ★ 8. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu’à partir d’un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n) .
- ★ 9. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu’à partir d’un certain rang on ait $u_n \geq v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n) .
- ★ 10. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu’à partir d’un certain rang on ait $u_n \geq v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n) .
- ★ 11. Si une suite (u_n) converge, alors elle est monotone.
- ★ 12. Si une suite (u_n) est monotone, alors elle converge.
- ★ 13. Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
- ★ 14. Si une suite (u_n) est croissante et minorée, alors elle converge.
- ★ 15. Si une suite (u_n) est décroissante et majorée, alors elle converge.
- ★ 16. Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

★ **Exercice 6.17** suite récurrente

- ★ 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ★ 1.1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bien définie qui satisfait $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ★ 1.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone puis en étudier la convergence.
- ★ 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
- ★ 2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < 2$.
- ★ 2.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
- ★ 2.3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
- ★ 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
- ★ 3.1. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ★ 3.2. Montrer que la suite (u_n) est divergente sans étudier sa monotonie.
- ★ 3.3. Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
- ★ 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ★ 4.1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 2$.
- ★ 4.2. En supposant que $\lim_n u_n$ existe, la calculer.
- ★ 4.3. Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
- ★ 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.
- ★ 5.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- ★ 5.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
- ★ 5.3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
- ★ 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.
- ★ 6.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
- ★ 6.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
- ★ 6.3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
- ★ 7. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4}$.
- ★ 7.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{3}{2}$.
- ★ 7.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
- ★ 7.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
- ★ 8. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 - 1$.
- ★ 8.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
- ★ 8.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
- ★ 8.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
- ★ 9. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > \frac{15}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 - \frac{15}{4}$.
- ★ 9.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{15}{2}$.
- ★ 9.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
- ★ 9.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
- ★ 10. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$.
- ★ 10.1. Montrer que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ★ 10.2. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
- ★ 10.3. En étudier la convergence.
- ★ 11. Étudier la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- ★ 12. Étudier la suite (u_n) telle que $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- ★ 13. Étudier la suite (u_n) telle que $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.18 Suite récurrente

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1} . En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a .
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n \forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a .

Exercice 6.19

On sait que \sqrt{a} désigne le nombre positif dont le carré vaut a . Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \dots}}}}$$

Lequel et que vaut b ?

Exercice 6.20 Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est à dire telle que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_n (v_n - u_n) = 0$. Montrer que $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis que les deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 6.21 Moyenne arithmético-harmonique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites bien définies puis que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > b_n.$$

2. Vérifier que la suite $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. En supposant qu'elle existe, calculer la limite commune au deux suites.
4. Montrer que les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 6.22 Moyenne géométrico-harmonique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite (appelée *moyenne géométrico-harmonique* de a_0 et b_0).

Calcul de logarithmes et moyenne arithmético-géométrique

Lorsque l'on désire calculer un sinus, un logarithme, une exponentielle, etc., avec une précision allant de quelques dizaines à quelques milliers de chiffres, la solution la plus couramment retenue consiste à approcher la fonction désirée par un polynôme. Pour obtenir de bien plus grandes précisions à un coût raisonnable, on utilise la moyenne arithmético-géométrique de GAUSS-LEGENDRE. Si on part de deux valeurs a_0 et b_0 , et que l'on construit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, les deux suites convergent très vite (c'est-à-dire s'approchent très vite). Notons $\ell(a_0, b_0)$ cette limite. La table ci-dessous donne les premières étapes du calcul de $\ell(1, 2)$:

i	a_i	b_i
0	1	2
1	1.5	1.4142135623730
2	1.4571067811865	1.4564753152197
3	1.4567910481542	1.4567910139395
4	1.4567910310469	1.4567910310469

En utilisant (pour un x grand) la relation

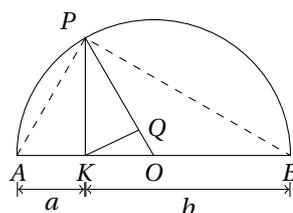
$$\frac{\pi}{2\ell(1, 4/x)} = \log(x) + \frac{4\log(x) - 4}{x^2} + \frac{36\log(x) - 42}{x^4} + \dots$$

on se ramène au calcul d'une moyenne arithmético-géométrique bien choisie pour calculer des logarithmes avec une très grande précision.

Source : Vincent LEFÈVRE et Jean-Michel MULLER, «Erreurs en arithmétique des ordinateurs» — Images des Mathématiques, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Erreurs-en-arithmetique-des.html>

Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique : interprétation géométrique

Soient a et b les longueurs des deux segments contigus, et considérons le demi-cercle dont le diamètre est l'union de ces deux segments. Construisons la perpendiculaire au point K (où les deux segments se rencontrent), et soit P le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le demi-cercle. Soit O le centre du demi-cercle et soit Q le pied de la perpendiculaire au rayon OP passant par K .



On a $\overline{PQ} < \overline{PK} < \overline{PO}$ et en utilisant les théorèmes sur les triangles rectangles on trouve

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}_{\text{Moyenne harmonique}} < \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{Moyenne géométrique}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{Moyenne arithmétique}}$$

Exercice 6.23

Donner l'exemple

- d'une suite non bornée (donc non convergente) ;
- d'une suite bornée non convergente ;
- de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
- de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
- de deux suites bornées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 6.24

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants

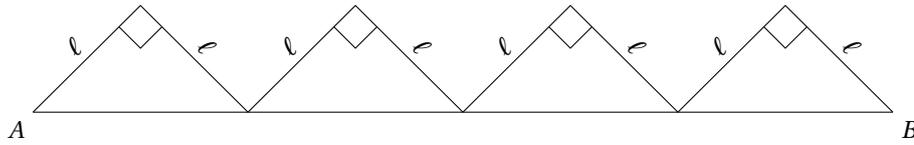
$$(1) \quad u_n := (-1)^n, \quad (2) \quad u_n := \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}}, \quad (3) \quad u_n := \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 6.25

Considérons un polygone régulier à n cotés inscrit dans un disque de rayon r . Montrer que son périmètre tend vers la longueur du cercle lorsque n tend vers $+\infty$.

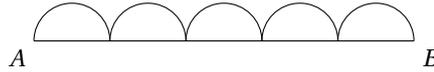
Exercice 6.26

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme en figure. On obtient une ligne de segments de longueur $L = 2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB . Vers quelle valeur tend-elle ?



Exercice 6.27

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un demi-cercle comme en figure. On obtient une ligne de longueur L . Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB . Vers quelle valeur tend-elle ?



7

Limites et continuité

Exercice 7.1

Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m , l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 7.2

En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g . Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 7.3

La force d'attraction entre deux masses est donnée par la loi de NEWTON $F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ où F est la force d'attraction (en newtons), $G = 6.67 \times 10^{-11}$ est une constante universelle, r est la distance (en mètres) entre les masses et m_1 et m_2 sont les masses. Soit la masse de la Terre 6×10^{24} kg et celle, approximative, d'un satellite 10^4 kg. À partir de quelle distance la force exercée par la Terre sur le satellite est-elle inférieure à 10 N ? Et inférieure à $\varepsilon > 0$ N ? Que vaut la limite $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r)$?

Exercice 7.4

Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K , r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 7.5

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$,

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$,

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$,

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$,

5. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$,

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$,

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$,

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$,

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$,

Exercice 7.6

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

$$f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) := \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

Exercice 7.7

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin(x), & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \sin(x), & \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos(x), & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cos(x), & \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{array}$$

Exercice 7.8

Calculer les limites suivantes :

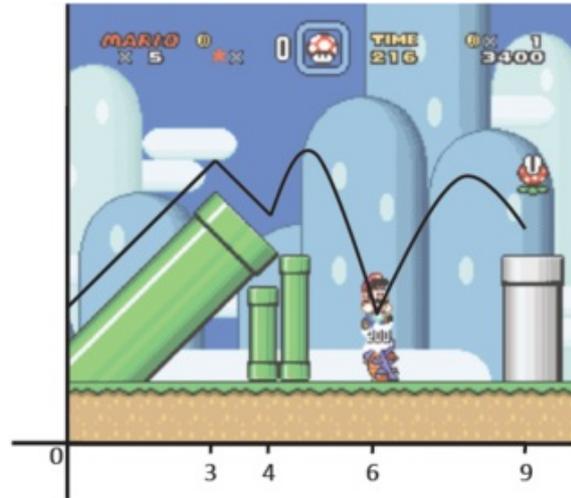
$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), & 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - \cos(x)}{x}, & 5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12}. \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sin(x)}{\ln(x)}, & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+2x)}{2 \sin(x)(\cos(3x) - 1)}, & \end{array}$$

Exercice 7.9

Au niveau 1 de Super Mario World, Mario court et saute vers la droite. Notons x sa position horizontale. Sa hauteur h est décrite en fonction de x par la fonction définie par morceaux suivante :

$$h(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ 9 - x, & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ -4x^2 + 39x - 87, & \text{si } 4 \leq x < 6, \\ -x^2 + 16x - 57, & \text{si } 6 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Montrer que le parcours de Mario est continu sur l'intervalle $[0;9]$. Autrement dit, vérifier que la fonction h est continue en $x = 3$, $x = 4$ et $x = 6$.

**Exercice 7.10** *Discontinuité de première espèce*Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.**Exercice 7.11** *Discontinuité de seconde espèce*Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.**Exercice 7.12** *Fonction prolongeable par continuité*Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.**Exercice 7.13**Étudier, en fonction des deux entiers positif n et m , si f est prolongeable en 0

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Exercice 7.14

Soient $E := [-2, -1[\cup \{0\} \cup]+1, +2]$ et $F := [-1, +1]$. Soit f l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E \quad f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-2, -1[, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x-1 & \text{si } x \in]+1, +2]. \end{cases}$$

Montrer que f est bijective et continue en tout point de E mais qu'il existe un point de F en lequel f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 7.15

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7.16

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 7.17

1. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Établir si f est continue.

2. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Établir si f est continue.

3. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Établir si f est continue.

4. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

4.1. Montrer que f est continue.

4.2. f est-elle prolongeable par continuité en 0?

4.3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x - 1 - \ln|x|.$$

5.1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$.

5.2. Établir si f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7.18

1. Établir si la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

2. Établir si la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x > 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

3. Établir si la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7.19

Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln|x|}{x-1} & \text{si } x \notin \{0, 1\}, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Est-elle continue ?

Exercice 7.20

- Dire si l'application $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1 . Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
- Dire si l'application $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1 . Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Exercice 7.21 Application du théorème de la bijection

Soit f l'application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$.

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique qu'on notera a .
- Soit g la bijection réciproque de f . Étudier monotonie et continuité de g en précisant son comportement aux bornes de l'ensemble de définition.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 7.22

Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 7.23

Soit f une fonction continue et injective de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Prouver que f est strictement monotone.

Exercice 7.24

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Exercice 7.25

Considérons l'équation $x(1 + e^x) = e^x$. Montrer qu'elle admet une unique solution réelle ℓ dans $[0; 1]$.

Exercice 7.26

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1 < \ell_2$ de f et les calculer.

◆ **Exercice 7.27**

Considérons la fonction $f: [-\frac{\pi}{2}; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

◆ **Exercice 7.28**

Soit la fonction $f_\gamma(x) = \cosh(x) + \cos(x) - \gamma$. Pour $\gamma = 1, 2, 3$ trouver (graphiquement) un intervalle qui contient le zéro de f_γ .

💡 **Exercice 7.29** *Application du théorème des valeurs intermédiaires*

★ Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

💡 **Exercice 7.30** *Application du théorème des valeurs intermédiaires*

★ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{35} + x - 10^{-35}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $f(x) = 0$ et $0 < x < \frac{1}{10}$.

💡 **Exercice 7.31**

★ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

- ★ 1. $f(x) = x^2 - 16, I =]0, +\infty[$,
- ★ 2. $f(x) = x^2 - 160, I =]-\infty, 0[$,
- ★ 3. $f(x) = x^2 - \sqrt{2}, I =]-\infty, 0[$,
- ★ 4. $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}, I =]0, +\infty[$.

◆ **Exercice 7.32**

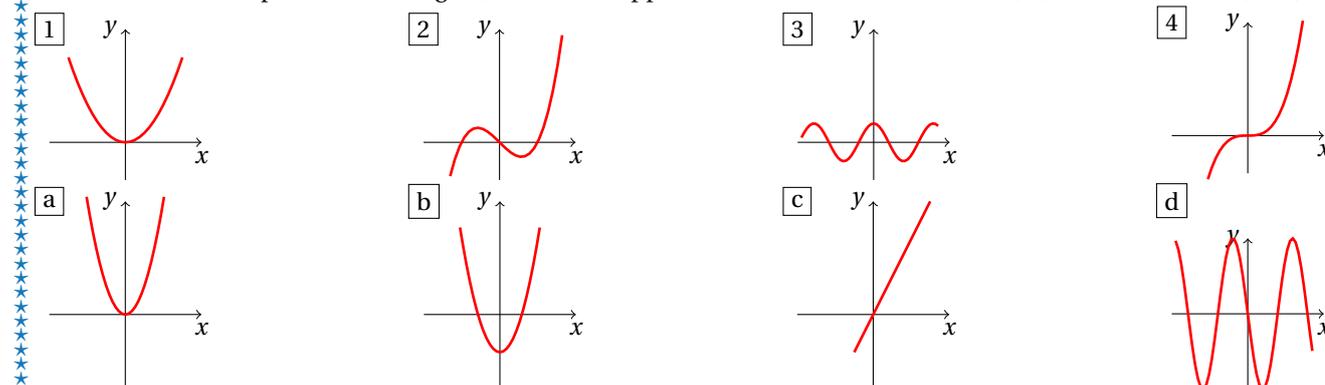
Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

8

Dérivabilité

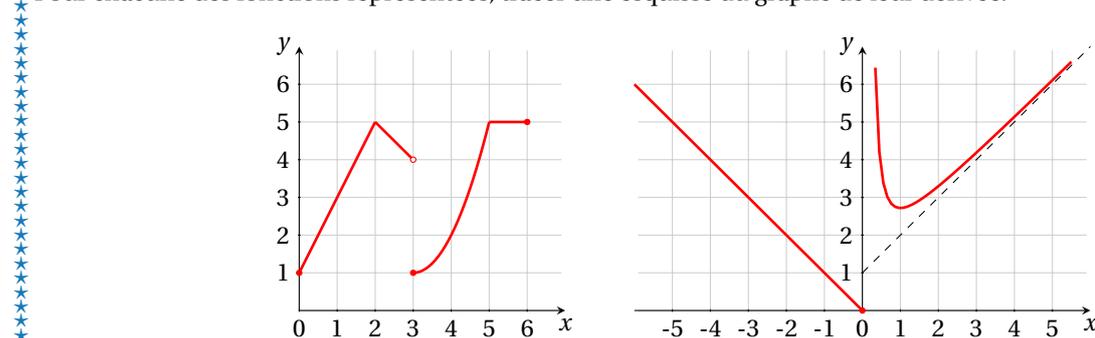
Exercice 8.1

Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Exercice 8.2

Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.



Exercice 8.3

Calculer les dérivées des fonctions :

1. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

3. $H(z) = \sin(z) \cos(z)$

5. $g(t) = t^3 \sin(t)$

7. $G(v) = 5v^2$

2. $f(t) = 4t^3 + 2t - 1$

4. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 + 3x - 7}$

6. $T(r) = r^2 \tan(r)$

8. $R(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{1 - \sin(\omega)}$

Exercice 8.4

Calculer les dérivées des fonctions :

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------------------|--|
| 1. $\sin(x) \cos(x)$ | 5. e^{x^2-3} | 9. $\sin(2x+1)$ | 13. $(3x+2)^9$ |
| 2. $\cos(-2x+1)$ | 6. $\frac{4x}{\cos(x)}$ | 10. $x \cos(5x)$ | 14. $\sin\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$ |
| 3. $\frac{x}{\sin(2x)}$ | 7. $2xe^{\cos(x)}$ | 11. $\left(1-\frac{x}{7}\right)^7$ | 15. $\frac{1}{(2x+1)^4}$ |
| 4. $\ln(x^2+1)$ | 8. $\sqrt{\cos(x)+2}$ | 12. $\sin(x^2)$ | 16. $\sin(2x) \cos(7x)$ |

Exercice 8.5

Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Exercice 8.6 Tangentes

- Calculer la pente de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ en 1. Trouver l'équation de cette tangente.
- Calculer la pente de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0. Trouver l'équation de cette tangente.
- Calculer la pente de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1. Trouver l'équation de cette tangente.
- Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point $(2, 0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b .
- Le graphe de f passe par le point $(2, 3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en x est égale à $2x$. Passe-t-il par le point $(3, 9)$?
- La pente de la tangente au graphe de f en $x = 1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x = 1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$ si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$?

Exercice 8.7

On considère une fonction exponentielle $f: x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* qu'importe la valeur choisie pour c .

Exercice 8.8

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $P(V) = nRT/(V - nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P' .

Exercice 8.9

Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A \cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Exercice 8.10

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de 10. S'il se trouve initialement au sol à une distance de 200 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\theta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?

Exercice 8.11

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de 10. S'il se trouve initialement au sol à une distance de 100 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\theta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après 10 s ?

Exercice 8.12

Une masse tombe avec une accélération constante a . Comment évolue sa vitesse ?

Exercice 8.13

Quelle accélération constante (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de $0 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ à une vitesse de $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ en 10 s ?

Exercice 8.14

Une ligne de téléphone relie deux pylônes distants de 14 m. Les sommets des pylônes se trouvent aux points $(-7, 0)$ et $(7, 0)$. La ligne décrit une courbe d'équation $y = 8(\cosh(x/7) - \cosh(1))$. Trouver l'angle entre le pylône et la tangente à la ligne au point d'attache.

◆ **Exercice 8.15** *Théorème de l'HÔPITAL - FI.* $\left[\frac{0}{0}\right]$

Calculer les limites suivantes :

- | | | | |
|--|---|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(x)}$ | 34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^3}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln(x)}$ | 35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x^2 - x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x}$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$ | 36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 2x}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$ | 37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 - 9}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ | 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^3}$ | 38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(kx)}{x}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$ | 39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x - 1}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{x - \pi}$ | 40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x^2}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x + \sin(x)}$ | 41. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a + h) - \sin(a)}{h}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - 1}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 3}{4x}$ | 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ | 42. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a + h) - \cos(a)}{h}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^x}{x}$ | 32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^3}$ | 43. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + 4}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$ | 33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^3}$ | 44. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a}$ |

◆ **Exercice 8.16** *Théorème de l'HÔPITAL - FI.* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Calculer les limites suivantes :

- | | | | |
|--|---|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{e^x}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{2x + 1}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^4}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2}{5x - 3}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{x^2}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x^3 + x^2}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2)}$ |

◆ **Exercice 8.17** *Théorème de l'HÔPITAL*

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL pour les calculer ?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$, | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos(x)}{2x - \cos(x)}$ | |

◆ **Exercice 8.18** *Théorème de l'HÔPITAL - FI.* $[0 \cdot \infty]$

Calculer les limites suivantes :

- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$ | 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x)$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$ | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \tan(x)$ |

◆ **Exercice 8.19** *Théorème de l'HÔPITAL - FI.* $[\infty - \infty]$

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{2 \ln(x)}\right)$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x - 1}\right)$ | 4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(x - 1)^2}\right)$ |

💡 **Exercice 8.20**

★ Calculer les limites suivantes.



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln(x)}{x-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$$

🔑 **Exercice 8.21** *Application du théorème des accroissements finis*

Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

🔑 **Exercice 8.22**

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-b\}$ telle que $f(x) = \frac{ax^2 - 4}{x + b}$. On note \mathcal{G} la courbe représentative de f .

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
2. Si $b = -2/\sqrt{a}$ et $a > 0$ alors f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
3. Si $b = 2/\sqrt{a}$ et $a > 0$ alors f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
4. \mathcal{G} admet une asymptote verticale pour tout a et b .
5. Il existe au moins une valeur de a telle que \mathcal{G} admet une asymptote horizontale.
6. Il existe au moins une valeur de $a \neq 0$ telle que \mathcal{G} admet une asymptote oblique.
7. Soit $a = b = 1$, alors \mathcal{G} est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
8. Soit $a = -1$ et $b = 1$, alors \mathcal{G} est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8.23

Soit f l'application définie sur \mathbb{R} dont le tableau de variations est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

1. $f(x) = |x| + 1$
 2. $f(x) = e^x - x$
 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Exercice 8.24

Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, répondre aux questions suivantes :

- ★ f_α est-elle continue en $x = 0$?
- ★ f_α est-elle dérivable en $x = 0$?
- ★ f_α est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8.25

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8.26

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8.27

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8.28

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8.29

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8.30

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8.31

Dans chaque question, on définira une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est \mathbb{R} et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

1. f est injective et non surjective,
2. f est surjective et non injective,
3. f est bijective et non continue au point 1,
4. f est injective, continue dans \mathbb{R} et bornée,
5. f est continue dans \mathbb{R} et non dérivable au point 1,
6. f est dérivable dans \mathbb{R} et f' est non continue au point 0,
7. f est bornée et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 8.32

Soit $h: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème de Rolle?

Exercice 8.33

Soit $h: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis?

Exercice 8.34

Soit $g:]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow]0; 1[$ une application telle que $g(x) = \sin(x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1} . Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]0; 1[$.

Exercice 8.35

Soit $g:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur \mathbb{R}_-^* .
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1} . Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $] -1; 0[$.

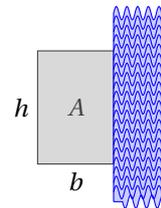
Exercice 8.36

Soit $g:]-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = \ln(1+x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]-1, 0[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -2$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1} . Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-\infty; 0[$.

Exercice 8.37

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?

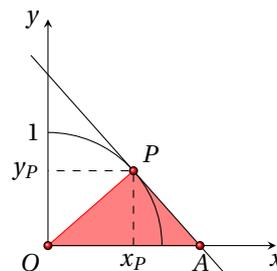


Exercice 8.38

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

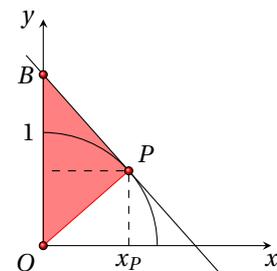
Exercice 8.39

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x . Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P .



Exercice 8.40

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y . Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P .



Exercice 8.41 Dérivée d'une fonction composée

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

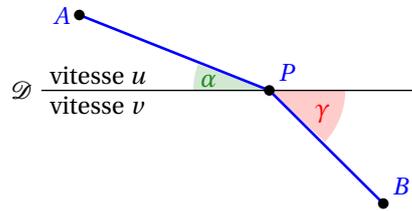
Exercice 8.42 Dérivée d'une fonction composée

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de côté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Exercice 8.43

D'après le principe de Fermat un rayon lumineux n'emprunte pas le chemin le plus court mais le chemin le plus rapide. Autrement dit, ce n'est pas la longueur du parcours mais sa durée qui est minimale.

- Démontrer la loi de la réfraction : "dans le plan soient A et B deux points de chaque côté d'une droite \mathcal{D} . On suppose que la lumière voyage à vitesse u dans le demi plan contenant A et à vitesse v dans l'autre demi-plan. Alors le rayon lumineux prend le chemin caractérisé par l'équation $u \cos(\gamma) = v \cos(\alpha)$ où α et γ sont les angles indiqués ci-dessous."



(Indication : choisir un repère adapté et exprimer le temps nécessaire pour le chemin en fonction de la position du point P ; puis minimiser par un calcul de dérivée.)

- Pour un rayon lumineux qui arrive sur la surface d'un lac un nageur mesure $\alpha = 45^\circ$ et $\gamma = 58^\circ$. En déduire la vitesse de la lumière dans l'eau.

Exercice 8.44

Un alpiniste commence à escalader une montagne un samedi à 7 heures du matin. À 5 heures de l'après-midi, il atteint le sommet, où il décide de passer la nuit. Le dimanche matin à 7 heures, il entame sa descente. Il arrive à son point de départ à 17 heures. On suppose que son altitude varie continument au cours du temps. Prouver qu'à un même moment de la journée du samedi et celle du dimanche, il était à la même altitude.

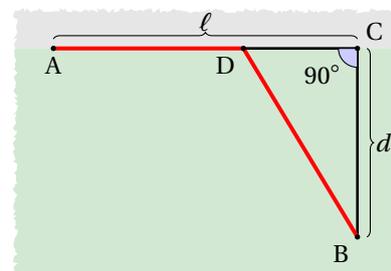
Exercice 8.45

On considère un produit dont le prix unitaire est p ($p > 0$). On note q la quantité vendue de ce produit pendant un mois et on suppose que $q(p) = \alpha + \beta p$ où α et β sont des réels.

- Peut-on déjà prédire le signe de la constante β ?
- De combien varie la quantité vendue lorsque le prix augmente de 1 ?
- Quelle est la plus grande valeur de p possible sachant que la quantité vendue q est un nombre positif ?
- On suppose désormais que $q = 5000$ si $p = 100$, et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β .
- Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
- Quelle est la valeur maximale des recettes ?
- Le coût unitaire de fabrication du produit est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $g(p)$ total réalisé (c'est-à-dire la différence entre recettes et coût).
- Pour quelle quantité le profit est-il maximal ?

Exercice 8.46

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connaît les distances $AC = \ell$ et $CB = d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d .



Exercice 8.47

On note x la quantité produite, p le prix et $f(x)$ le coût. On suppose que l'on se trouve dans un cas de concurrence parfaite, dans lequel le prix de la marchandise est indépendant de la quantité produite. Le profit est la fonction $\Pi(x) = \text{recette} - \text{coût}$. Prouver que le profit est optimal lorsque la recette marginale est égal au coût marginal.

Exercice 8.48

On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
 - 1.1. une fois par an,
 - 1.2. une fois par mois,
 - 1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Exercice 8.49

Un joueur de football, en possession du ballon, court sur la ligne de touche. Ayant une frappe extrêmement forte il ne se soucie pas de la distance et tire à l'endroit où l'angle d'ouverture par rapport au but est maximal. Quel est alors cet angle (en degrés) ?

Utiliser les dimensions recommandées par la FIFA : terrain 105 m × 68 m et largeur du but 7.32 m.

Exercice 8.50

Deux rues se coupent en formant un angle droit. Une voiture circule sur une rue à une vitesse de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et une seconde voiture circule sur l'autre rue à une vitesse de $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les voitures partent toutes les deux d'une distance de 200 m du point d'intersection et se dirigent vers l'intersection des rues. Quelle sera leur distance minimale ?

Exercice 8.51

La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive proportionnelle à $1/r^6$ et une force répulsive proportionnelle à $1/r^{12}$. La distance d'équilibre est celle pour laquelle le potentiel de LENNARD-JONES est minimal. Calculer cette distance sachant que ce potentiel est donné par

$$V(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right)$$

où σ est une distance, appelée distance de collision, et ε est le potentiel minimal.

Exercice 8.52

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{-\alpha r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule se trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Exercice 8.53

La mesure de la distance entre deux points donne une série de valeurs expérimentales d_1, d_2, \dots, d_n . Sur la base de ces valeurs, on désire obtenir une estimation de d qui soit la plus proche possible de la réalité. Trouver une formule pour d telle que la mesure d'erreur

$$(d - d_1)^2 + (d - d_2)^2 + \dots + (d - d_n)^2$$

soit minimale.

Exercice 8.54

Une société produit des boîtes en carton de 5 L a forme de parallélépipède à base carrée. Les boîtes doivent utiliser la moindre quantité de carton possible. Quelles dimensions doit-elle fixer ?

Exercice 8.55

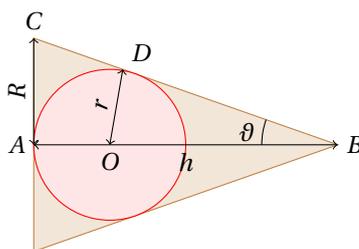
Étudier brièvement la fonction $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 8.56

Étudier brièvement la fonction $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 8.57 Cônes de glace

On veut insérer entièrement une sphère de glace dans un cône de biscuit de sorte à ce que le cône soit le plus remplis possible. Ceci revient à minimiser le rapport entre le volume du cône et le volume de la sphère.



- ★ Exprimer la hauteur h et le rayon R du cône en fonction de $r > 0$ le rayon de la sphère et de $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ l'angle du cône.
- ★ Trouver la valeur de ϑ qui minimise le rapport $\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}$.
- ★ Calculer la hauteur h et le rayon R optimaux du cône en fonction du rayon de la sphère r .

Exercice 8.58

On considère l'équation

$$\cos(x) = \frac{2}{3}x.$$

1. Montrer que si x est solution de l'équation alors $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que l'équation admet une unique solution sur \mathbb{R} .
3. Donner une approximation de cette solution à 10^{-1} près.

9

Plan d'étude d'une fonction numérique

💡 Exercice 9.1

★ Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

★ en répondant aux questions suivantes :

- ★ 1. ensemble de définition
- ★ 2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition
- ★ 3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
- ★ 4. convexité, concavité
- ★ 5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
- ★ 6. graphe

💡 Exercice 9.2

★ Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$$

★ en répondant aux questions suivantes :

- ★ 1. ensemble de définition
- ★ 2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition
- ★ 3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
- ★ 4. convexité, concavité
- ★ 5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
- ★ 6. graphe

Exercice 9.3

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $+\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 9.4

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \ln(x - x^5)$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $-\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

Exercice 9.5

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

Exercice 9.6

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).
8. Dresser le graphe de f .

Exercice 9.7

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \ln|x-1|, & \text{si } x \neq 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 1$, puis $f'(1)$.
3. Étudier la continuité de f' en 1.
4. Écrire l'équation de la tangente au graphe de f au point $(1, 0)$. Écrire l'équation de la tangente au graphe de f au point $(2, 0)$.
5. Établir si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
6. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
7. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
8. Dresser le graphe de f .

Exercice 9.8

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f , son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f .

Exercice 9.9

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}.$$

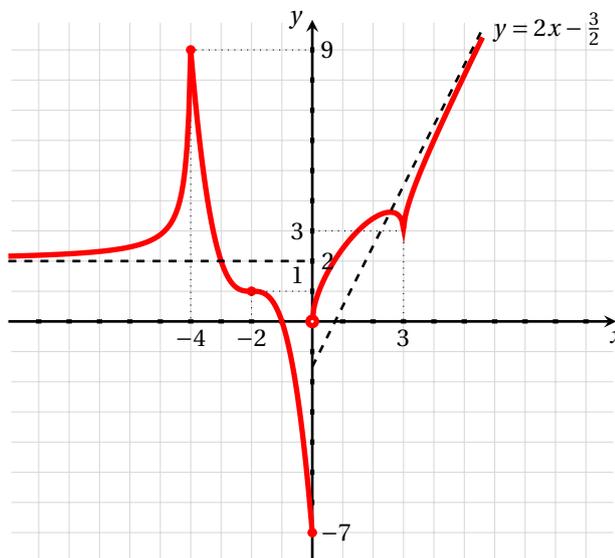
1. Trouver l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Préciser les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et étudier son signe.
5. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f .

Exercice 9.10

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x-27} & \text{si } x \leq -4, \\ 1 - (x+2)^3 & \text{si } -4 < x \leq 0, \\ x + \sqrt{|x^2 - 3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 9.11

Considérons la fonction $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x^2 - 2x}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition A .
2. Trouver le signe de f .
3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x \rightarrow \pm\infty$.
4. Trouver la dérivée de f et où f est croissante ou décroissante.
5. Dessiner le graphe de f .

Exercice 9.12

Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

en détaillant

1. son domaine et son signe,
2. les limites pour $x \rightarrow \pm\infty$,
3. étudier la dérivée de f .



10

Primitives et EDO

Primitives

Exercice 10.1 Par intégration directe ou par transformations élémentaires

Calculer les primitives suivantes :

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1. $\int 2x^3 - 3x + 1 \, dx$ | 11. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2} \, dx$ | 20. $\int \sin^3(x) \cos(x) \, dx$ | 29. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \, dx$ |
| 2. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$ | 12. $\int xe^{x^2} \, dx$ | 21. $\int \sin(3x) \, dx$ | 30. $\int (1 + 2x^3)^2 \, dx$ |
| 3. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$ | 13. $\int \frac{\ln^3(x)}{x} \, dx$ | 22. $\int \frac{1}{\sin(x) \cos(x)} \, dx$ | 31. $\int (1 + \cos(x))^2 \, dx$ |
| 4. $\int \sqrt{2x+1} \, dx$ | 14. $\int \frac{1}{x \ln^3(x)} \, dx$ | 23. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$ | 32. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ |
| 5. $\int e^{2x+1} \, dx$ | 15. $\int x^2 e^{x^3} \, dx$ | 24. $\int x(x^2 + 1)^2 \, dx$ | 33. $\int \frac{1}{\sin^2(x) \cos^2(x)} \, dx$ |
| 6. $\int \sqrt[4]{(x-1)^3} \, dx$ | 16. $\int \frac{1 + \cos(x)}{x + \sin(x)} \, dx$ | 25. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \, dx$ | 34. $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx$ |
| 7. $\int \frac{x}{x+1} \, dx$ | 17. $\int \frac{x^3}{1+x^4} \, dx$ | 26. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} \, dx$ | 35. $\int \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)} \, dx$ |
| 8. $\int x\sqrt{5+x^2} \, dx$ | 18. $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)} \, dx$ | 27. $\int (ax+b)^n \, dx$ avec
$a \neq 0$ et $n \neq 1$ | 36. $\int \frac{1}{\sin(4x)} \, dx$ |
| 9. $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ | 19. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \, dx$ | 28. $\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx$ avec
$ax+b \neq 0, a \neq 0$ et $n > 1$ | |
| 10. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ | | | |

Exercice 10.2 Intégration par changement de variable

Calculer les primitives suivantes :

- | | | | |
|---|--|--|---|
| 1. $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} \, dx$ | 7. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} \, dx$ | 13. $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$ | 19. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} \, dx$ |
| 2. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ | 8. $\int e^x \ln(1+e^x) \, dx$ | 14. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$ | 20. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$ |
| 3. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}} \, dx$ | 9. $\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))} \, dx$ | 15. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} \, dx$ | 21. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \, dx$ |
| 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} \, dx$ | 10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ | 16. $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} \, dx$ | 22. $\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$ |
| 5. $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ | 11. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} \, dx$ | 17. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ | 23. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ |
| 6. $\int \frac{1}{x \ln(x)} \, dx$ | 12. $\int \sqrt{e^x-1} \, dx$ | 18. $\int x\sqrt{a+x^2} \, dx$ | |

Exercice 10.3 Intégration par parties

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

5. $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

9. $\int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

14. $\int x^3 \ln(x) dx$

2. $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$

6. $\int x \sin(x) dx$

10. $\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} e^{\tan(x)} dx$

15. $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}} dx$

3. $\int \ln(1+x) dx$

7. $\int x \ln(x) dx$

11. $\int x^3 \sin(x)^2 dx$

16. $\int \ln^2(x) dx$

4. $\int x^2 e^x dx$

8. $\int x^2 \cos(x) dx$

12. $\int e^{2x} \sin(3x) dx$

17. $\int x \sin^2(x) dx$

13. $\int e^{-3x} \cos(2x) dx$

Exercice 10.4 (P HALMOS)

Si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que **la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées**, autrement dit $(fg)' \neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)' = f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Exercice 10.5 Formules de réduction

Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \left(x^n - \frac{n}{\alpha} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} x^{n-2} \dots + (-1)^n \frac{n!}{\alpha^n} \right) \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int \sin^n(x) dx = \frac{-\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx,$$

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{\cos^{n-1}(x) \sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int x^n \sin(x) dx = -x^n \cos(x) + nx^{n-1} \sin(x) - n(n-1) \int x^{n-2} \sin(x) dx,$$

$$\int x^n \cos(x) dx = x^n \sin(x) + nx^{n-1} \cos(x) - n(n-1) \int x^{n-2} \cos(x) dx.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq -1$ et $x > 0$. Montrer que

$$\int x^\alpha \ln^n(x) dx = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1} \ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2} \ln^{n-2}(x) \dots + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} \right) \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Exercice 10.6 Intégration de fonctions rationnelles

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{a}{x-b} dx$

c) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$

e) $\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} dx$

b) $\int \frac{a}{(x-b)^n} dx, n \neq 1$

d) $\int \frac{3x+1}{x^3-4x} dx$

Intégrales

Exercice 10.7

La valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0; k]$ est 9. Calculer k .

Exercice 10.8 Vitesse et accélération

Soit $V > 0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = Vt(1-t)$ km·h⁻¹ durant l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 1$.

h. Quelle a été sa vitesse maximale ? Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Exercice 10.9

Calculer

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \mathcal{B} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2} dx, \quad \mathcal{C} = \int_{-1}^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx.$$

Exercice 10.10 Calcul de l'aire

Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x$

Exercice 10.11 Calcul de l'aire

Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi, \frac{1}{8} \leq y \leq \cos^3 x \right\},$$

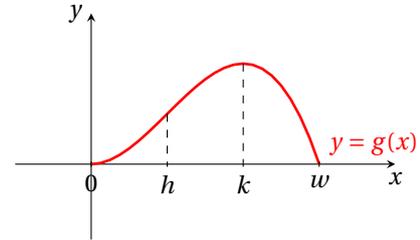
$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi, \frac{1}{8} \leq y \leq \cos^3 x \right\}.$$

Exercice 10.12

Dans la figure ci-contre on a tracé le graphe de la fonction $g: [0; w] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

avec $f: [0; w] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Le graphe de g a tangente horizontale en $x = 0$ et présente un changement de concavité en $x = h$ et un maximum en $x = k$.



1. Calculer $f(0)$ et $f(k)$.
2. Tracer un graphe plausible de f et montrer qu'elle admet un maximum.
3. Dorénavant on suppose que g est une fonction polynomiale de degré 3.
 - 3.1. Montrer que $h = w/3$ et $k = 2h$.
 - 3.2. Pour $w = 3$ et $g(1) = 2/3$ trouver l'expression de g .

Exercice 10.13 Calcul d'impôt

Le principe de l'impôt sur les revenus est le suivant : le revenu imposable^a pour l'année 2013 est partagé en tranches et l'impôt à payer en 2014 est calculé en prenant un certain pourcentage de chaque tranche. Voici alors les tranches d'imposition selon les données officielles prises sur le site du ministère des finances :

- jusqu'à 6011 € : 0%
- de 6011 € à 11991 € : 5.5%
- de 11991 € à 26631 € : 14%
- de 26631 € à 71397 € : 30%
- de 71397 € à 151200 € : 41%
- plus de 151200 € : 45%

Mathématiquement parlant, l'impôt est une *fonction continue* du revenu pour qu'il n'y ait pas d'injustices : une petite modification du revenu n'entraîne qu'une petite modification de l'impôt (sauter d'une tranche n'est pas un drame). Avec des taux marginaux par tranches, on obtient une fonction *croissante* (plus le revenu est élevé et plus l'impôt est élevé) et affine par morceaux ; et puisque le taux marginal augmente en fonction du revenu il s'agit d'une fonction *convexe*. Cela signifie que la courbe «monte toujours plus vite» : plus le revenu est élevé et plus le taux marginal augmente. Non seulement l'impôt augmente en fonction du revenu mais il augmente de plus en plus vite.

Écrire et tracer le graphe des fonctions suivantes en fonction du revenu imposable :

1. Taux marginal,
2. Impôt,
3. Taux global,
4. Ce qui reste après avoir payé l'impôt.

a. Il s'agit du revenu du contribuable auquel on retire certaines sommes (par exemple au titre des frais professionnels).

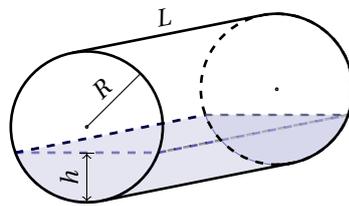
Exercice 10.14 Probabilité géométrique

1. On sélectionne un point au hasard sur une cible *circulaire*. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus prêt du centre que de la circonférence de la cible ?
2. On sélectionne un point au hasard sur une cible *carrée*. Quelle est la probabilité que le point sélectionné soit plus prêt du centre du carré que d'un de ses côtés ?

Source : <http://www.thedudeminds.net>

Exercice 10.15 *Problème pratique*

J'ai acheté une ancienne maison qui utilise du mazout pour le chauffage. Le constructeur avait enterré une cuve cylindrique dont je ne connais pas la capacité, je peux juste mesurer la hauteur du mazout dans la cuve et le rayon qui est de 0.80 m. Sachant qu'au départ la hauteur du mazout dans la cuve est de 0.36 m et qu'après avoir ajouté 3000 L la hauteur est de 1.35 m, je veux calculer le volume totale de la cuve et tracer la fonction qui renvoie les litres que je peux ajouter en fonction de la hauteur de mazout présent dans la cuve.

**EDO du premier ordre****Exercice 10.16** *EDO linéaire*

Résoudre l'équation différentielle

$$(x+1)y'(x) + y(x) = (x+1)\sin(x)$$

sur des intervalles à préciser.

Exercice 10.17 *EDO à variables séparables*

Résoudre le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 10.18 *EDO à variables séparables*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 4xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 10.19 *EDO à variables séparables*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ty^2(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

en fonction de la donnée initiale y_0 .

Exercice 10.20 *EDO linéaire*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (3x^2 + 1)y(x) = x^2 e^{-x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10.21 *EDO linéaire*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (3x^2 - 1)y(x) = x^2 e^x, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Exercice 10.22 *EDO linéaire*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{x-1}y(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10.23 *EDO linéaire*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (4x^3 + 5)y(x) = x^3 e^{-5x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10.24 *EDO linéaire*

★ Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2y(x) + e^{-2x}$ qui ont dérivée nulle en $x = 0$.

💡 **Exercice 10.25** *EDO linéaire*

★ Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2xy(x) + x$.

📌 **Exercice 10.26** *Datation au carbone 14*

Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. À la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On note $n(t) > 0$ le nombre d'atomes au temps t , exprimé en années, après la mort de l'organisme. Ce mécanisme se traduit par l'équation

$$n'(t) = -kn(t)$$

où k est une constante positive.

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.
2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort, calculer k .
3. Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

💡 **Exercice 10.27** «*Les experts - Toulon*»

★ Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 22H00 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°C . Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20°C et si la température externe est de -5°C ?

★ Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

📌 **Exercice 10.28** «*Un gâteau presque parfait*»

Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100°C). Après 10 minutes sa température est de 80°C et de 65°C à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.

Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

💡 **Exercice 10.29**

★ Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de 1g/l à l'instant $t = 0$ interagissent et produisent une substance dont la concentration est notée $y(t)$ à l'instant $t \geq 0$. On suppose que $y(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1. Montrer que toute solution de l'EDO est une fonction croissante.
2. Chercher les solutions constantes de l'EDO.
3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que l'on a $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$. (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas et on pourra s'aider d'un dessin.)
4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \ell$ existe. Puis, en admettant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ .
5. Calculer la solution lorsque $y(0) = 0$, lorsque $y(0) = 1$ et lorsque $y(0) = 2$. Dans chacun de ces cas établir l'intervalle maximale d'existence.

💡 **Exercice 10.30** *Logistique*

★ Soit k et h deux constantes positives. Calculer $p(t)$ pour $t > 0$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t) - hp^2(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

★ Ce modèle, qui décrit l'évolution d'une population de p individus à l'instant t , suppose que le taux de croissance du nombre d'individus n'est pas constant mais diminue si la population augmente (les ressources se réduisent).

💡 **Exercice 10.31** «*Urgence*»

★ On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie se propage par contact). Si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$. Si la ville est isolée et compte 5000 individus dont 160 sont malades et 1200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Exercice 10.32

On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (t est exprimé en années et $y(t)$ en millions de ménages). Le modèle de VARHULST estime que sur la période 1980 – 2020, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

1. Calculer toutes les solutions de l'équation différentielle.
2. On pose $t = 0$ en 1980 et on sait que $y(0) = 0,01$. Combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020?

Exercice 10.33 Modèle de GOMPertz

Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement ; son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de GOMPertz suivant :

$$y'(t) = -y(t) \ln(y(t)).$$

Calculer toutes les solutions de cette équation différentielle pour $t > 0$ (ne pas oublier les solutions constantes). La population va-t-elle survivre ?

Exercice 10.34

Dans un circuit électrique de type résistance-inductance, le courant I évolue avec le temps selon

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{V}{L}$$

où R , L et V sont des constantes associées aux composants électriques. Résolvez l'équation différentielle. La solution I tend-elle vers une limite finie ?

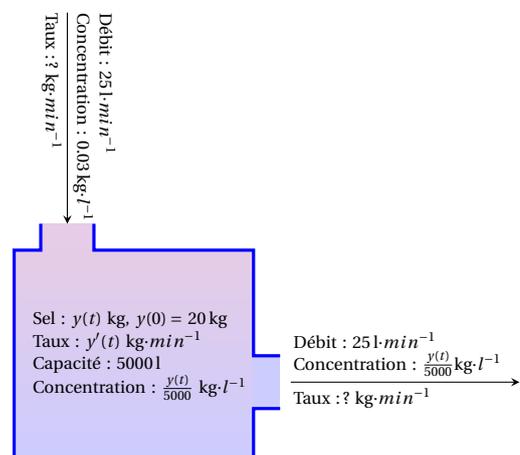
Exercice 10.35

On considère un réservoir de capacité 5000 l rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de $25 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$. La solution est maintenue bien mélangée. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t , $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, *i.e.* la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.

1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 0,75 - \frac{y(t)}{200}, \\ y(0) = 20. \end{cases}$$

2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure ?



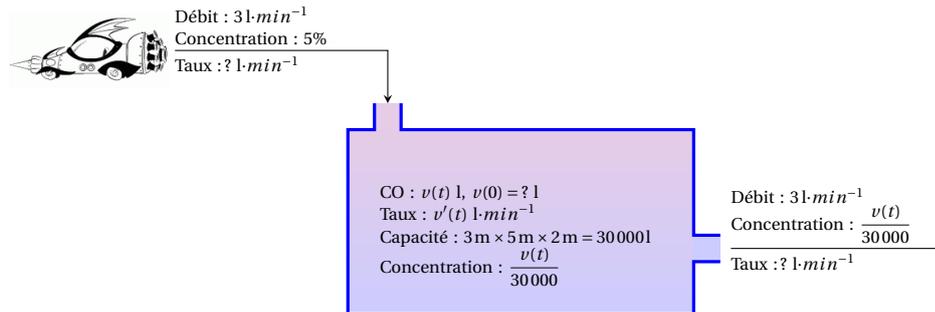
Exercice 10.36

L'air d'un garage de $3\text{ m} \times 5\text{ m} \times 2\text{ m}$ est initialement chargée de 0.001% de monoxyde de carbone (CO). À l'instant $t = 0$, on fait tourner un moteur et des fumées toxiques contenant 5% de CO se dégagent de la pièce à raison de 3 litres par minute. Heureusement, l'air de la pièce est éliminée à la même vitesse de $3\text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$. On note $v(t)$ le volume de CO présent dans la pièce au temps t .

1. En supposant que le mélange se fait instantanément, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10000}, \\ v(0) = 0.3. \end{cases}$$

2. Déterminer le volume $v(t)$ de CO présent dans la pièce au temps t . Calculer vers quelle valeur limite $v(t)$ tend lorsque t tend vers l'infini.
3. Le seuil critique pour la santé est de 0.015% de CO. Après combien de temps ce taux est-il atteint ?



Exercice 10.37 Un escargot sur un élastique

Un escargot avance d'un mètre par jour sur un élastique d'un kilomètre de long. Mais l'élastique s'étire d'un kilomètre par jour. L'escargot arrivera-t-elle au bout de l'élastique ?

Source : <http://allken-bernard.org/pierre/weblog/?p=209>

EDO du second ordre

Exercice 10.38

Calculer les solutions des EDO linéaires du second ordre à coefficients constants suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$

5. $y''(x) - y'(x) = e^x$

2. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$

4. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$

Exercice 10.39

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 10.40

Calculer toutes les solutions de l'EDO $2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = e^x$.

Exercice 10.41

Calculer toutes les solutions de l'EDO $2y''(x) - 7y'(x) + 5y(x) = -3e^x$.

Exercice 10.42 Équation différentielle du second ordre

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x+1)e^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

◆ **Exercice 10.43** *Équation différentielle du second ordre*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (1-x)e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

◆ **Exercice 10.44** *Équation différentielle du second ordre*

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 2xe^{4x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

◆ **Exercice 10.45**

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = 108x \cos(3x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

◆ **Exercice 10.46** *Oscillateur harmonique forcé : cas d'une excitation sinusoïdale*

On s'intéresse à l'influence d'une excitation harmonique sur un oscillateur. Outre le fait que ce type d'excitation est important pour lui-même (vibrations d'une machine tournante, mouvement d'un électron dans un champ magnétique...), cette étude revêt un intérêt théorique capital. En effet, la fonction qui décrit cette force excitatrice peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales (discrète ou continue selon que la force est périodique ou non). Le fait que l'équation différentielle soit linéaire, autrement dit que le principe de superposition puisse s'appliquer, permet d'écrire la solution pour une force quelconque comme la somme des solutions obtenues pour chaque terme de la décomposition. Il est alors nécessaire de déterminer la réponse à chaque terme de la décomposition, à savoir à une excitation sinusoïdale. Ceci donne une importance considérable à l'étude de l'excitation sinusoïdale.

Étudions l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un corps de masse $m > 0$ qui se déplace horizontalement assujéti à une force générée par un ressort de constante élastique $k > 0$ et une force externe d'intensité $f(t) = A \cos(\varphi t)$ avec A et φ deux paramètres réels (on a négligé le frottement).