L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Corrigé de l'examen du 10 janvier 2018

Exercice 1 (Logique). (1) La négation de $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$ est P *et* Q *et* non$R$.

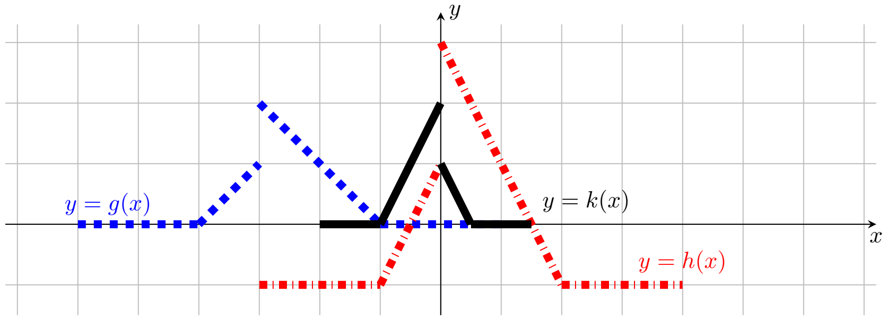
(2) La contraposée de $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$ est non$R \Rightarrow$ non$(P \text{ et } Q)$, qu'on peut aussi écrire non$R \Rightarrow$ (non$P$ *ou* non$Q$).

(3) La négation de la proposition S est : $\exists \epsilon > 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq k, \quad g_n \geq \epsilon$.

(4) La proposition S est vraie pour la suite $g_n = \frac{1}{n}$, car pour $\epsilon > 0$ il suffit de choisir $k > \frac{1}{\epsilon}$ pour avoir $g_n < \epsilon$ pour tout $n \geq k$.

(5) La proposition "non$S$" est vraie pour $g_n = 1 + \frac{1}{n}$, il suffit de choisir $\epsilon = 1$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a $g_n \geq \epsilon$ pour $n = k$.

Exercice 2 (Tracés de courbes). (1) L'équation de f sur l'intervalle $]0,2[$ est $f(x) = 2 - x$.



(2) En pointillés bleus : le graphe de la fonction g où $g(x) = f(x+3)$.

(3) En pointillés alternés rouges : le graphe de la fonction h où $h(x) = 2f(x) - 1$

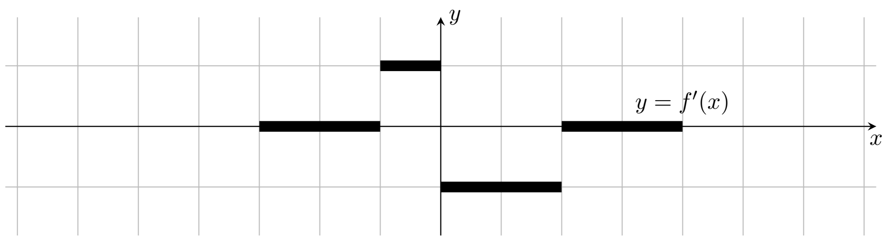
(4) En trait plein noir : le graphe de la fonction k où $k(x) = f(-2x)$

(5) La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [-3,-1[\\ 1 & \text{sur }]-1,0[\\ -1 & \text{sur }]0,2[\\ 0 & \text{sur }]2,4] \end{cases}$$

et son domaine de définition est $[-3,-1[\cup]-1,0[\cup]0,2[\cup]2,4]$ (on peut aussi considérer qu'en -3 et 4 seules les dérivées à droite et à gauche respectivement existent).

(6) Le graphe de la fonction dérivée f' est :



Exercice 3 (Suite). (1) Définition d'une suite géométrique : voir le cours.

(2) Pour $n \geq 0$ on calcule

$$v_{n+1} = u_{n+1} + b = cu_n - \frac{b}{2} + b = c(v_n - b) + \frac{b}{2} = cv_n + b(c - \frac{1}{2})$$

La valeur de c telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ est donc $c = \frac{1}{2}$, pour laquelle on trouve $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ pour tout $n \geq 0$.

(3) Comme $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + b = a + b$ on sait que pour tout n on a $v_n = (a+b)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $u_n = v_n - b = (a+b)\left(\frac{1}{2}\right)^n - b$ pour tout n.

(4) D'après la question précédente, on a $u_1 = \frac{a-b}{2}$ et $u_2 = \frac{a-3b}{4}$, donc il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{a-b}{2} &= 0 \\ \frac{a-3b}{4} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b &= 0 \\ a-3b &= 4 \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -2$ et $b = -2$.

(5) On a alors $v_0 = -4$ et donc

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = -4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -8 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

et comme $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ on trouve $\lim_{n\to\infty} s_n = -8$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction). (1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et par composition des limites on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(2x^2+2) = +\infty$$

(2) On trouve $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, d'où le tableau de variations

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f atteint un minimum global en 0, avec $f(0) = \ln(2)$, et pas de maximum.

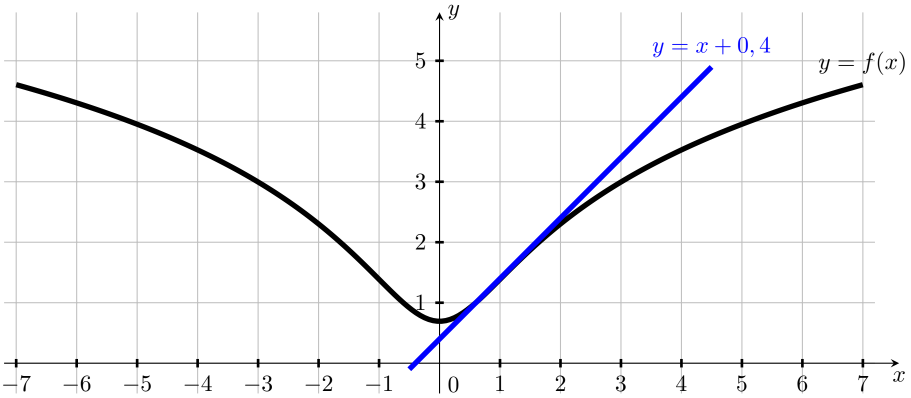
(3) On trouve $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Ainsi f'' change de signe en -1 et en 1, qui sont donc les deux points d'inflexion de f. De plus, f est concave sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$ et f est convexe sur $[-1,1]$.

(4) On calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (par croissance comparée entre ln et les puissances, ou la règle de l'Hopital) et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0\times x = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) comme direction asymptotique en $+\infty$. Puisque f est paire, il en est de même en $-\infty$.

(5) L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \times (x-1) + \ln(4) = x - 1 + 2\ln(2) \simeq x + 0,4$$

(6) Avec les informations précédentes on obtient l'allure suivante pour la courbe représentative de f :



Exercice 5 (Calcul intégral). (1) On calcule

$$\frac{x}{4} = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow x(x^2+1) = 4x \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

donc $a_1 = \sqrt{3}$ et $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(2) On trouve $I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{4}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{8}$ et $I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\ln(4)}{2} = \ln(2)$.

(3) La surface de la région P est $I_2 - I_1 = \ln(2) - \frac{3}{8} \simeq 0,3$.