L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

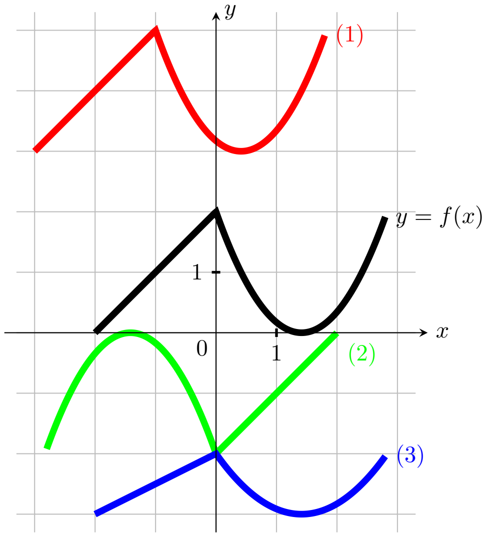
Mathématiques M11

Corrigé de l'examen du 4 janvier 2016

**Exercice 1** (Logique)**.** (1) La négation de P est : "il fait sombre ou il fait nuit et au moins un chat n'est pas gris".
(2) La contraposée de P est : "Si au moins un chat n'est pas gris alors il ne fait pas sombre et il ne fait pas nuit".
(3) Comme P et vraie et qu'au moins un chat n'est pas gris, la contraposée permet d'affirmer qu'il ne fait pas sombre et qu'il ne fait pas nuit. Par conséquent Q est vérifiée, qu'on voie bien la lune ou non. On ne peut donc pas affirmer si on voit bien la lune ou non.

**Exercice 2** (Transformations sur le graphe)**.** On obtient les graphes :

(1) $x \mapsto f(x+1)+3$,
(2) $x \mapsto -f(-x)$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)-3$.




Aucun des deux graphes ne correspond au graphe de la dérivée de $f$ : pour (A) le problème est que la dérivée sur $[-2,0[$ est constante égale à 1 (et pas 2 comme dans (A)), et pour (B) le problème est que la dérivée à droite en 0 est manifestement strictement inférieure à $-1$ (et qu'elle est strictement supérieure à $-1$ sur (B)).

**Exercice 3** (Suite)**.** (1) On a $p_1 = 2$ et $p_0 = -2$.
(2) La suite $(p_n)$ n'est ni une suite arithmétique ($p_{n+1} - p_n$ n'est pas constant) ni une suite géométrique ($\frac{p_{n+1}}{p_n}$ n'est pas constant).
(3) Le calcul montre que $\frac{q_{n+1}}{q_n} = -\frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 0$ donc $(q_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
(4) Comme $(q_n)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ cette suite tend vers 0 (car $-\frac{1}{2}$ est dans $]-1,1[$), or $p_n = q_n + \frac{2}{3}$ donc $p_n$ tend vers $\frac{2}{3}$.
(5) Puisque $q_0 = -\frac{8}{3}$ la formule du cours donne

$$u_n = -\frac{8}{3}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{16}{9}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\frac{16}{9}$$

**Exercice 4** (Étude d'une fonction)**.** Soit $f$ la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x^2 + \ln(e^x + 1)$$

(1) Comme $e^x > 0$ pour tout réel $x$, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(2) On trouve $f'(x) = 2x + \dfrac{e^x}{e^x+1}$ et $f''(x) = 2 + \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

La fonction $f''$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : cette fonction s'annule donc en au plus un point. Comme $0 < e^{-1} < 1$ on obtient $\frac{e^{-1}}{e^{-1}+1} < 1$ et donc $f'(-1) < -1 < 0$. De plus $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ donc comme $f'$ est continue sur $\mathbb{R}$ on en déduit qu'elle s'annule entre $-1$ et $0$. Donc $f'$ s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$. *Autre argument :* On peut aussi remarquer que $f'$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $f'(\mathbb{R})$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ donc l'image $f'(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$ : ainsi $f'$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet d'affirmer qu'elle s'annule exactement une fois.

(3) D'après ce qui précède on a

| | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | | $+$ |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

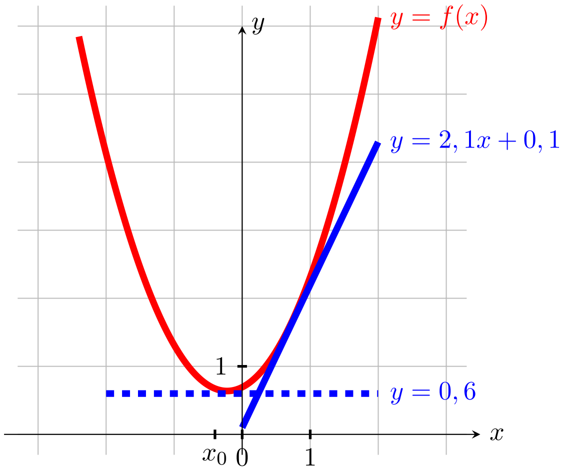
donc $f$ atteint un minimum local (en fait global) en $x_0$.

(4) Comme $f''$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(5) L'équation de la tangente au graphe de $f$ au point d'abscisse $\ln(2)$ est

$$y = (2\ln(2) + \frac{2}{3})(x - \ln(2)) + (\ln(2))^2 + \ln(3) \simeq 2,1\,x + 0,1$$

(6) On obtient le graphe :




**Exercice 5** (Calcul intégral). (1) On résoud $\frac{a_1}{2} = a_1 \ln(a_1)$ avec $a_1 \neq 0$ : on peut donc simplifier par $a_1$ et on obtient $a_1 = e^{1/2} = \sqrt{e}$. On a donc $a_2 = \frac{\sqrt{e}}{2}$.

(2) On obtient directement

$$I_1 = \int_0^{a_1} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{a_1} = \frac{e}{4}$$

et par intégration par parties :

$$I_2 = \int_0^{a_1} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_0^{a_1} - \int_0^{a_1} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{e}{4} - \frac{e}{4} = 0.$$

(3) La surface de la région $P$ est $I_1 - I_2 = \frac{e}{4}$.