L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Correction de l'examen du jeudi 8 janvier 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique)**.**

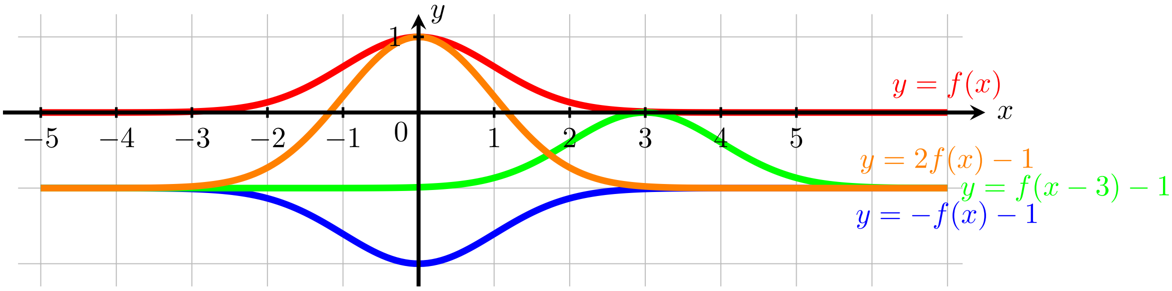
(1) La négation de la proposition "(P *et* Q) $\Rightarrow R$" est "P *et* Q *et non*(R)".

(2) La négation de la proposition "$\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$" est "$\forall n \in \mathbb{N},\ n < 2$" (ou de manière équivalente "$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq 1$)".

(3) La négation du principe des tiroirs est : *le nombre de tiroirs de rangement est strictement inférieur au nombre de chaussettes* **et** *on range toutes les chaussettes dans les tiroirs* **et** *tous les tiroirs contiennent strictement moins de deux chaussettes.* On peut aussi réécrire cela sous la forme : *le nombre de tiroirs de rangement est strictement inférieur au nombre de chaussettes* **et** *toutes les chaussettes sont rangées dans les tiroirs* **et** *tous les tiroirs contiennent strictement moins de deux chaussettes.*

(4) La contraposée du principe des tiroirs est : **Si** *tous les tiroirs contiennent au plus une chaussette* **alors** *le nombre de tiroirs de rangement est supérieur au nombre de chaussettes* **ou** *on ne range pas toutes les chaussettes dans les tiroirs.*

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On obtient les graphes suivants :



Le deuxième graphe proposé correspond à la transformation (b).

Exercice 3 (Suite)**.**

(1) Une suite géométrique est une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ pour laquelle il existe deux réels c et q tels que le terme général est donné par la formule $x_n = c\,q^n$, avec $c \neq 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$. Dans ce cas, c est égal au premier terme x_0 et q est la raison de la suite.
On peut aussi donner comme définition la caractérisation : une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est géométrique si son premier terme x_0 est non nul et si il existe un réel q tel que $q \neq 0$, $q \neq 1$ et $x_{n+1} = q\,x_n$ pour tout $n \geq 0$.

(2) Pour tout $n \geq 1$ on a $u_{n+1} = 2u_n$.

(3) D'après la question précédente, comme le joueur perd à chaque tour on a aussi $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \geq 1$. La caractérisation des suites géométriques permet d'obtenir que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2. On a alors $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ (ici on commence à $n = 1$).

(4) Puisque $2 > 1$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(5) S'il perd ses 9 premières mises, le joueur a perdu en tout:

$$u_1 + \ldots + u_9 = 2^0 + \ldots + 2^8 = \sum_{k=0}^{8} 2^k = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2^9 - 1 = \frac{2^{10}}{2} - 1 = \frac{1024}{2} - 1 = 511$$

en utilisant la formule de sommation des termes d'une suite géométrique.

(6) Au tour 10 le joueur a misé $2^9 = 512$ et le casino lui donne deux fois sa mise : il gagne donc exactement sa mise, moins tout ce qu'il a perdu aux tours précédents. En tout, il gagne donc $512 - 511 = 1$ euro.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.**

(1) Puisque $1 + e^{2x} > 1$ pour tout réel x, on pourra toujours calculer le logarithme ln et donc f est définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{2x}) - x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

où on a utilisé le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\ln(1) = 0$. On calcule également

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{1+e^{2x}} = 1$$

où on utilisé la règle de l'Hôpital car c'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$: on se sert alors de la formule pour f' donnée dans la question suivante,et du fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$. Enfin on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{f(x)}{x} = (+\infty) \times 1 = +\infty$$

(2) Il s'agit d'une dérivée composée, et on a effectivement

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - 1 = \frac{2e^{2x} - 1 - e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1+e^{2x}-2}{1+e^{2x}} = 1 - \frac{2}{1+e^{2x}}$$

On remarque que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		-	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

On voit que f atteint un minimum global sur $\mathbb{R}$ en $x = 0$.

(3) La dérivée seconde f'' de f est donnée sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = -2 \times -\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f n'a pas de point d'inflexion et elle ext convexe sur $\mathbb{R}$.

(4) On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = 0$$

donc la courbe représentative de f admet la droite $y = -x$ comme asymptote en $-\infty$ Grâce à la règle de l'Hôpital, on calcule également :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$$

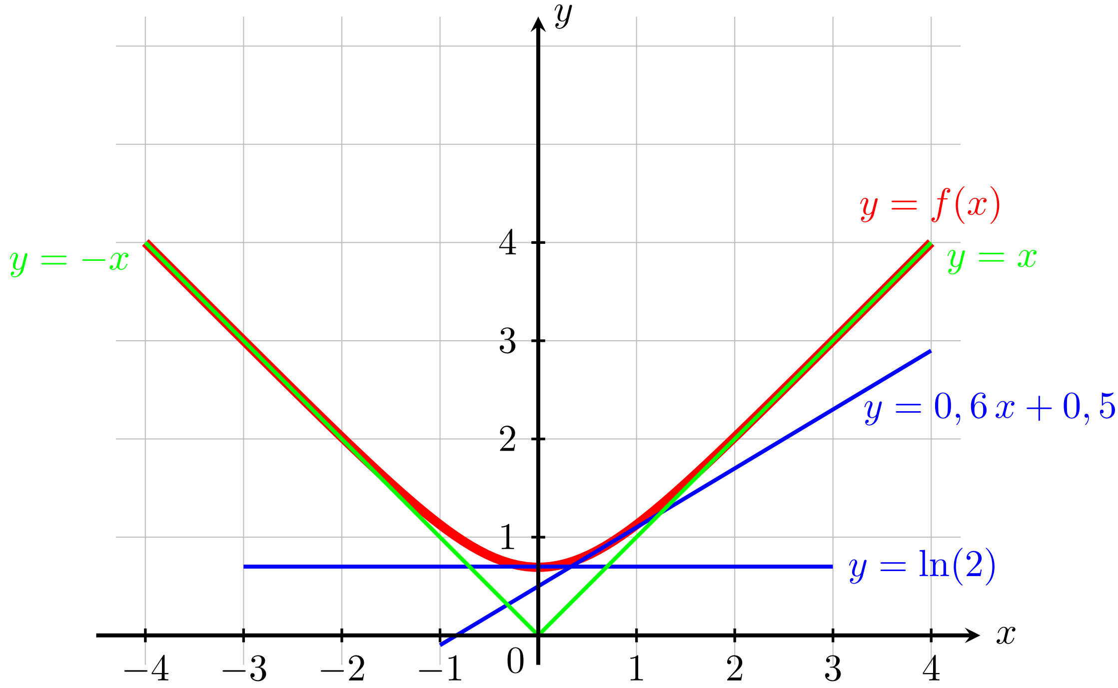
donc la courbe représentative de f admet la droite $y = x$ comme asymptote en $+\infty$.

(5) L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$ est

$$\begin{aligned} y &= f'(\ln(2))(x-\ln(2)) + f(\ln(2)) \\ &= \left(1 - \frac{2}{1+e^{2ln(2)}}\right)(x-\ln(2)) + \ln(1+e^{2ln(2)}) - \ln(2) \\ &= \left(1 - \frac{2}{1+4}\right)(x-\ln(2)) + \ln(1+4) - \ln(2) \\ &= \frac{3}{5}(x-0,7) + 0,9 = 0,6\,x + 0,5 \end{aligned}$$

où on a utilisé $2\ln(2) = \ln(2^2) = \ln(4)$ et $e^{\ln(x)} = x$.

(6) Tracé de la courbe représentative de f et la tangente de la question (5) :



Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto c\,e^{-ax}$ où c est une constante réelle : en effet, la fonction $x \mapsto -ax$ est une primitive de la fonction constante égale à $-a$ sur $\mathbb{R}$.

(2) La solution du problème Cauchy

$$y_a'(x) = -ay_a(x), \quad y_a(0) = 1$$

est la fonction $y_a : x \mapsto e^{-ax}$ (parceque $y_a(0) = 1$ impose $c = 1$ dans la question précédente).

(3) Pour la solution trouvée à la question (2), on a $\lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 0$ si $a > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} y_a(x) = +\infty$ si $a < 0$.
Si on veut résoudre $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 1/2$, il faut donc trouver $a > 0$ tel que $y_a(1) = 1/2$. Cette équation donne effectivement $a = \ln(2) > 0$, qui est donc la valeur cherchée.
Si on veut aussi résoudre $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 2$, il faut trouver $a > 0$ tel que $y_a(1) = 2$. Cette équation donne $a = -\ln(2) < 0$, il n'y a donc pas de solution !ui est donc la valeur cherchée.

(4) On emploie la méthode de variation de la constante : puisque l'équation homogène de $y'(x) = -y(x) + x$ est $y'(x) = -y(x)$, on sait que les solutions de l'équation homogène

sont de la forme $y(x) = c\,e^{-x}$. Pour trouver une solution de l'équation initiale on fait varier la constante c et on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) = -y(x) + x \quad &\Leftrightarrow \quad (c(x)\,e^{-x})' = -c(x)\,e^{-x} + x \\ &\Leftrightarrow \quad c'(x)\,e^{-x} = x \;\Leftrightarrow\; c'(x) = x\,e^{x} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que c est une primitive de $x\,e^x$. Pour calculer la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 on procède à une intégration par parties :

$$c(x) = \int_0^x t\,e^t dt = [t\,e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - e^x + 1$$

On a donc comme solution particulière $y(x) = (xe^x - e^x + 1)e^{-x} = x - 1 + e^{-x}$, et les solutions de l'équation $y'(x) = -y(x) + x$ sont de la forme $x \mapsto c\,e^{-x} + x - 1$ où c est une constante réelle.

Exercice 6 (Bonus: Nombres complexes)**.**

(1) Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (1 - i) = -3 + 4i$, dont les racines carrées sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$ et donc les racines de cette équation sont i et $-1 - i$.

(2) L'argument principal de i est $\frac{\pi}{2}$ et son module et 1; L'argument principal de $-1 - i$ est $\frac{3\pi}{4}$ et son module et $\sqrt{2}$.

(3) On a donc $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 - i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.