Exercice 1 (Limite)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^x + 1}.$$
(1) Calculer la limite de f en $-\infty$.
(2) Calculer la limite de f en $+\infty$.

(1) Puisque $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{y \to 0} \frac{y^2 - 3}{y + 1} = -3$, la règle de composition des limites permet d'obtenir
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 3}{e^x + 1} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 - 3}{y + 1} = -3.$$

(2) On peut résoudre cette question de trois manières différentes :

- *Par factorisation :* on calcule
$$\frac{e^{2x} - 3}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{e^x - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$
et puisque $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on obtient
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{+\infty - 3 \times 0}{1 + 0} = +\infty$$

- *Par composition des limites :* on sait (limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un quotient de deux polynômes) :
$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y^2 - 3}{y + 1} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{y} = \lim_{y \to +\infty} y = +\infty$$
et puisque $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ on a par composition des limites
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3}{e^x + 1} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2 - 3}{y + 1} = +\infty$$

- *Par la règle de l'Hopital :* puisque $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, la limite à calculer
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3}{e^x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$
est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ donc on peut appliquer la règle de l'Hopital, ce qui donne
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^{2x} - 3)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} 2e^x = +\infty.$$

Exercice 2 (Suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(1) Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) En supposant que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, la calculer.
(3) En étudiant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

(1) On démontre par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété (P_n) : $u_n > 2$.
Initialisation : pour $n = 0$, comme $u_0 = 3 > 2$ on a bien que (P_0) est vraie.
Hérédité : soit $n \geq 0$, on suppose que (P_n) est vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$, et on doit vérifier (P_{n+1}). Comme $u_n > 2 > 0$ on a $u_n \times u_n > 2 \times 2$, et donc $u_{n+1} = u_n^2 - 2 > 4 - 2 = 2$. On a bien obtenu $u_{n+1} > 2$, donc (P_{n+1}) est vraie. Ceci termine la démonstration par récurrence.

(2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 2$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc si on suppose que la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle l alors cette limite doit être un point fixe de f, ce qui donne
$$f(l) = l \quad \textit{donc} \quad l^2 - l - 2 = 0 \quad \textit{donc} \quad l = -1 \textit{ ou } l = 2.$$
Les deux seules limites réelles possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc -1 et 2.

(3) Pour tout $n \geq 0$ on a
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 2$$
or les racines du polynôme $x^2 - x - 2$ sont -1 et 2, donc sur l'intervalle $[2, +\infty[$ ce polynôme est positif (il est du signe du coefficient de x^2 qui est égal à 1). Comme on a démontré que $u_n > 2$ pour tout $n \geq 0$ on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En particulier, pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \geq u_0 = 3$. On en déduit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle alors cette limite doit être supérieure ou égale à 3. On a vu à la question précédente que si cette suite a une limite réelle alors cette limite vaut -1 ou 2 : on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir de limite réelle. On sait qu'une suite croissante qui n'a pas de limite réelle tend vers $+\infty$, on obtient donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (Etude d'une fonction)**.** Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f.
(2) Calculer les limites de f en 1, 4, $-\infty$ et $+\infty$.
(3) Calculer la dérivée f' de f.
(4) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $x = 0$.
(5) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer les extrema (locaux ou globaux) de f sur son domaine de définition.
(6) Tracer le graphe de la fonction f.

(1) Le polynôme $x^2 - 5x + 4$ s'annule aux points
$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{25 - 4 \times 4}}{2 \times 1} = 1 \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{25 - 4 \times 4}}{2 \times 1} = 4$$
donc le domaine de définition de f est $]-\infty, 1[\cup]1, 4[\cup]4, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$.

(2) On fait les calculs suivants :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pour les autres limites, on remarque que le polynôme x^2-5x+4 est positif sur $]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$ et négatif sur $]1,4[$, on en déduit :

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x}{x^2-5x+4} = \frac{1^-}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-5x+4} = \frac{1^+}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to4^-} \frac{x}{x^2-5x+4} = \frac{4^-}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-5x+4} = \frac{4^+}{0^+} = +\infty$$

(3) On calcule

$$f'(x) = \frac{1\times(x^2-5x+4) - x\times(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$$

(4) La tangente au graphe de f au point $x=0$ a pour équation

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

et on trouve donc

$$y = \frac{4}{4^2}(x-0) + 0 = \frac{1}{4}x$$

(5) Le dénominateur de la dérivée f' est toujours positif (c'est un carré), donc $f'(x)$ est du signe du polynôme $-x^2+4$. On a

$$-x^2+4 = -(x-2)(x+2)$$

donc $-x^2+4$ est positif pour $x\in[-2,2]$ et négatif pour $x\in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$. On en déduit que f est croissante sur les intervalles $[-2,1[$ et $]1,2]$ et est décroissante sur les intervalles $]-\infty,-2]$ et $[2,4[$ et $]4,+\infty[$. On a donc le tableau de variations

	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
	$\Vert$ 0			$+\infty$	$\Vert$		-1		$\Vert$ $+\infty$		
f	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
	$\Vert$		$-\frac{1}{9}$		$\Vert$ $-\infty$			$-\infty$	$\Vert$		0

où $f(-2) = -\frac{1}{9}$ et $f(2) = -1$. La fonction f atteint un minimum local en $x=-2$ et un maximum local en $x=2$.

(6) On regroupe les informations précédentes : les limites en $-\infty$ et $+\infty$ indiquent que le graphe de f a pour asymptote la droite $y=0$ en $-\infty$ et $+\infty$. Elle a aussi deux asymptotes verticales aux points $x=1$ et $x=4$. Enfin, elle a des tangentes horizontales en $x=-2$ et $x=2$, et on connait la tangente en $x=0$.

Cela donne le tracé