3 Suites numériques

3.1 Introduction

Définition 29. *Une* **suite numérique** *est une famille de nombres réels indexée par l'ensemble des entiers naturels.*

Notation 10. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on peut aussi écrire $(x_n)_{n\geq 0}$, est la suite dont le premier terme est x_0, le deuxième terme est x_1,* et cetera*...*
La notation $(y_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dont le terme de rang n est $x_n = y_{n+1}$.

Remarque 27. Mathématiquement, on peut considérer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction numérique f définie sur $\mathbb{N}$ qui associe à l'entier n le nombre x_n, c'est-à-dire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n \end{array} \right.$.

Exemple 37.
- **suite constante :** soit b un nombre réel fixé, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont égaux à b est désignée comme étant la *suite constante égale à b*. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = b$.
- **suite arithmétique :** soit a un réel non nul et b un réel fixé, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a\,n + b)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *suite arithmétique de raison a et de premier terme b.*
- **suite géométrique :** soit q un réel différent de 0 et de 1, et soit c un réel non nul, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c\,q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *suite géométrique de raison q et de premier terme c.*
- **suite harmonique :** la *suite harmonique* est la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dont le terme de rang n est donné par la formule
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3.1. Propriété– Suites arithmétiques.
Soit a un réel non nul et b un réel fixé, alors on a l'équivalence
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = a\,n + b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + a, \end{array} \right.$$
autrement dit la suite arithmétique de raison a et de premier terme b est caractérisée par le fait que pour tout entier n le terme x_{n+1} de rang $n+1$ s'obtient à partir du terme x_n de rang n en lui additionnant la constante a.

Exemple 38. On suppose qu'une population microbienne est composée de 1000 individus à l'instant 0, et que chaque heure cette population augmente de 100 individus. Combien compte-t-elle d'individus au bout de 10 heures ? Au bout de 1000 heures ?

3.2. Propriété– Suites géométriques.
Soit q un réel différent de 0 et de 1, et c un réel non nul, alors on a l'équivalence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = c\,q^n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = c, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = q\,x_n, \end{cases}$$

autrement dit la suite géométrique de raison q et de premier terme c est caractérisée par le fait que pour tout entier n le terme x_{n+1} de rang $n+1$ s'obtient à partir du terme x_n de rang n en le multipliant par la constante q.

Remarque 28. La raison q de la suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c\,q^n)_{n\geq 0}$ est donc égal au quotient $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ de deux termes consécutifs de cette suite.

Exemple 39. On suppose qu'une population microbienne est composée de 1000 individus à l'instant 0, et que chaque heure cette population augmente de 2%. Combien compte-t-elle d'individus au bout de 10 heures ? Au bout de 1000 heures ?

3.2 Limite d'une suite

Définition 30. *On dit d'une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle* **admet une limite** *dans les trois cas suivants :*

- *soit l un nombre réel, on dit que* **la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** l *si on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k, \qquad |x_n - l| \leq \varepsilon,$$

autrement dit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un rang k à partir duquel tous les termes x_n de rang n supérieur à k sont dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Le nombre l est alors appelé **limite** *de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note alors*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

- *on dit que* **la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ *si on a*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k, \qquad x_n \geq M,$$

autrement dit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si pour tout réel M il existe un rang k à partir duquel tous les termes x_n de rang n supérieur à k sont dans l'intervalle $[M, +\infty[$. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

- *on dit que* **la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ *si on a*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k, \qquad x_n \leq M,$$

autrement dit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si pour tout réel M il existe un rang k à partir duquel tous les termes x_n de rang n supérieur à k sont dans l'intervalle $]-\infty, M]$. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

Définition 31. *Lorsque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, on dit qu'elle est* **divergente***.*

Notation 11. *Au lieu de "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l" on peut aussi dire "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l" ou "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet l pour limite".*
Au lieu de "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$" on peut aussi dire "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$" ou "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite" (idem pour $-\infty$).

Exemple 40. On considère les suites $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notation 12. *Par convention, on utilisera par la suite les identités suivantes :*

$$\forall l \in \mathbb{R},\ l + (+\infty) = +\infty \ \ et\ l + (-\infty) = -\infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$\forall l > 0,\ l \times (+\infty) = +\infty \ \ et\ l \times (-\infty) = -\infty; \quad \forall l < 0,\ l \times (+\infty) = -\infty \ \ et\ l \times (-\infty) = +\infty;$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty; \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

$$\forall l \in \mathbb{R},\ \frac{l}{+\infty} = 0 \ \ et\ \frac{l}{-\infty} = 0.$$

Par contre, les quantités suivantes n'ont a priori pas de sens : $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$.

3.3. Propriété – opérations sur les limites.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant chacune une limite (réelle, $+\infty$ ou $-\infty$). Alors on obtient les égalités suivantes, à condition que la quantité de droite existe :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \times y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}$
- si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exemple 41. On considère plusieurs combinaisons à partir des suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4. Propriété – comparaison des limites.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques pour lesquelles on a $x_n \le y_n$ à partir d'un certain rang, ce qui signifie :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \ge n_0, \qquad x_n \le y_n$$

Alors on a les propriétés suivantes :

- si chacune de ces deux suites admet une limite (réelle, $+\infty$ ou $-\infty$) alors
$$\lim_{n\to+\infty} x_n \ \le \ \lim_{n\to+\infty} y_n$$
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Remarque 29. Attention : le passage à la limite ne conserve pas l'inégalité stricte, c'est-à-dire qu'on peut avoir $x_n < y_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Par exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < \dfrac{1}{n+1}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Exemple 42. On considère la suite $(x_n)_{n\ge1}$ de terme général $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exemple 43. On considère la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a > 1$.

3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 32. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **arithmético-géométrique** *si elle est définie par un processus itératif de la forme :*

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \textit{pour tout } n \ge 0,\ x_{n+1} = q\, x_n + a \end{cases}$$

où a, b et q sont des réels fixés.

On a les cas particuliers suivants :
- Lorsque $q = 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue est une suite arithmétique de raison a.
- Lorsque $a = 0$, $q \ne 0$ et $q \ne 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue est une suite géométrique de raison q.

Pour chacun de ces cas particuliers, on peut calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (quand elle existe) et la somme des $n+1$ premiers termes selon les règles suivantes :

3.5. Propriété – Cas des suites arithmétiques.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique donnée par le processus itératif

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = x_n + a \end{cases}$$

avec $a \neq 0$, alors on a

- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et

$$\begin{cases} \text{si } a > 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} an + b = +\infty \\ \text{si } a < 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} an + b = -\infty \end{cases}$$

- la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$x_0 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} (ak+b) = \frac{n(n+1)}{2}a + (n+1)b$$

Exemple 44. Calculer la somme des n+1 premiers entiers pairs : $0 + 2 + 4 + \ldots + 2n$.

3.6. Propriété – Cas des suites géométriques.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique donnée par le processus itératif

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = qx_n \end{cases}$$

avec $q \neq 0$ et $q \neq 1$ et $b \neq 0$, alors on a

- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut admettre ou non une limite :

$$\begin{cases} \text{si } q > 1 \text{ et } b > 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b\,q^n = +\infty \\ \text{si } q > 1 \text{ et } b < 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b\,q^n = -\infty \\ \text{si } q \in]-1,1[, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b\,q^n = 0 \\ \text{si } q \leq -1, \text{ alors la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.} \end{cases}$$

- la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$x_0 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} b\,q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,b$$

Exemple 45. Calculer la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Quelle est la limite de cette somme ?

Exemple 46. Une population microbienne augmente de 10% toutes les heures. On l'observe initialement avec 200 individus. Combien d'heures s'écouleront pour atteindre 10000 individus ?

Le cas général est le suivant :

3.7. Propriété – Cas des suites arithmético-géométriques.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique donnée par le processus itératif

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = qx_n + a \end{cases}$$

alors

- le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$x_n \;=\; \left(b + \frac{a}{q-1}\right) q^n - \frac{a}{q-1}$$

- la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$x_0 + \ldots + x_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} x_k \;=\; \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\left(b + \frac{a}{q-1}\right) - (n+1)\frac{a}{q-1}$$

3.4 Quelques résultats théoriques

3.4.1 Limites classiques

On a les limites classiques :

- Quotient de deux polynômes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < l \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{si } k = l \\ +\infty & \text{si } k > l \text{ et } a_k \text{ du même signe que } b_l \\ -\infty & \text{si } k > l \text{ et } a_k \text{ du signe contraire de } b_l \end{cases}$$

  autrement dit la limite du quotient de deux polynômes est celle de la limite du quotient des deux termes de plus haut degré :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \ldots + b_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k}{b_l}\, n^{k-l}.$$

- limites associées aux fonctions ln et exp :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty; \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty; \quad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0; \quad \lim_{n\to+\infty} e^{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1; \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

- limites associées aux fonctions cos et sin :

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1; \qquad \lim_{n\to+\infty} n \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] = 0$$

3.4.2 Limites et monotonie

Définition 33. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **croisssante à partir du rang** n_0 *si*

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_{n+1} \geq x_n.$$

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **décroisssante à partir du rang** n_0 *si*

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_{n+1} \leq x_n.$$

Une suite est **monotone** *si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.*

Exemple 47. Cas des suites arithmétiques et géométriques.

Définition 34. *Soit M un nombre réel. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **majorée par** M *si tous ses termes sont inférieurs ou égaux à M :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \leq M.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **minorée par** M *si tous ses termes sont supérieurs ou égaux à M :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \geq M.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **bornée** *si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire qu'il existe un réel A tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n| \leq A.$$

Exemple 48. Exemple de la suite $(1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.8. Théorème – Limites des suites monotones.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à partir d'un certain rang. On a alors l'alternative :

- Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \ \leq \ M$$

- Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Dans le cas où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang on obtient

- Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel M, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \ \geq \ M$$

- Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exemple 49. Rappel : si $n \geq 1$, on note $n!$ le produit les entiers de 1 à n :

$$n! \;=\; 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Par convention, on pose $0! = 1$. On démontre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente.

3.4.3 Théorème des gendarmes

On a le résultat d'encadrement suivant :

3.9. Théorème – dit "des gendarmes".

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques pour lesquelles on a $x_n \leq y_n \leq z_n$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \qquad x_n \leq y_n \leq z_n$$

On suppose que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = l$$

Alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$.

Exemple 50. On considère la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.4 Suites récurrentes

Définition 35. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **récurrente** *si il existe une fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par le* processus itératif *(ou* relation de récurrence*) suivant :*

$$\begin{cases} x_0 \ \textit{fixé} \\ \textit{pour tout } n \geq 0, \quad x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Exemple 51. La suite arithmétique de premier terme b et de raison a est caractérisée par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_0 \;=\; b \\ \text{pour tout } n \geq 0, \quad x_{n+1} = x_n + a \end{cases}$$

et c'est donc une suite récurrente associée à la fonction $f : x \mapsto x + a$.

3.10. Théorème – Limite d'une suite récurrente.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par le processus $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite finie l et que f est continue au point l. Alors on a forcément que l est un **point fixe** de f, c'est-à-dire $f(l) = l$.

Remarque 30. On verra plus loin dans le cours une condition sur la dérivée de f qui assure que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite finie.

Exemple 52. La méthode de Héron pour calculer la racine carrée d'un nombre $a > 0$ consiste à calculer les termes de la suite récurrente associée à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

Exemple 53. On abordera les exemples de dynamique des populations suivants : si on note par p_n le nombre d'individus d'une population donnée à un instant n, les modélisations classiques de l'évolution de p_n en fonction de n amènent à considérer les cas des suites récurrentes

$$\begin{cases} p_0 \ = \ b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ \ p_{n+1} = f(p_n) \end{cases}$$

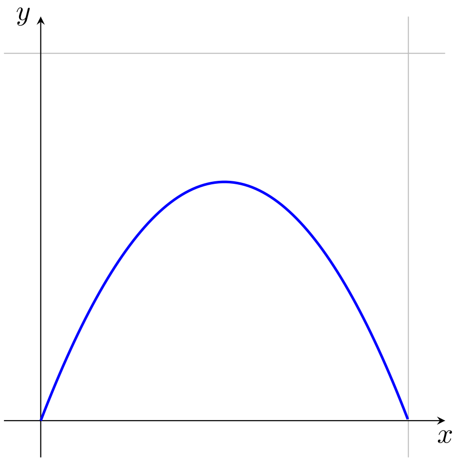
associées aux fonctions :

$$x \mapsto a\,x; \qquad x \mapsto \frac{a\,x}{e+x}; \qquad x \mapsto a\,x\,(e-x); \qquad x \mapsto \frac{a\,x}{e+x^2}.$$

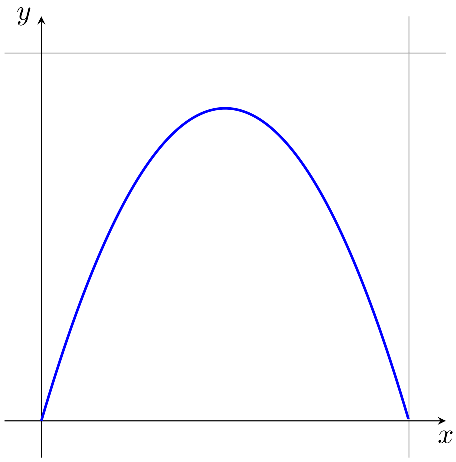
Dans l'étude des suites récurrentes, la représentation graphique de la fonction permet s'illustrer le comportement prédit théoriquement. Si on reprend les exemples précédents, dans le cas où

$$f:\ x \mapsto a\,x\,(1-x)$$

on a par exemple pour les cas $a = 2,6$ et $a = 3,4$ les représentations suivantes :

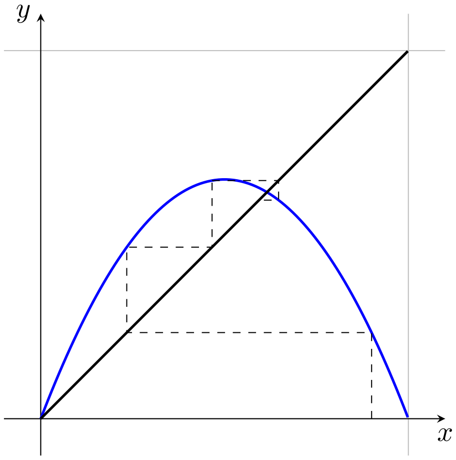


$y = 2,6\,x\,(1-x)$

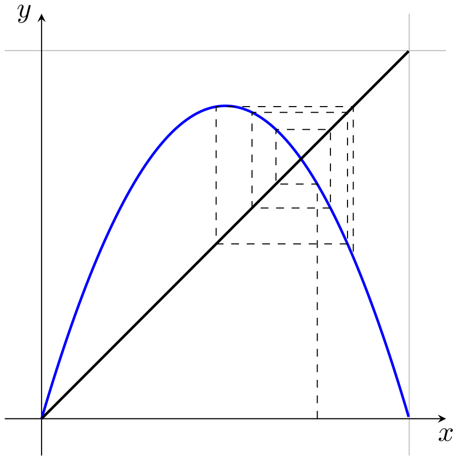


$y = 3,4\,x\,(1-x)$

On a alors les comportements suivants :



$y = 2,6\,x\,(1-x)$



$y = 3,4\,x\,(1-x)$