1 Éléments de logique

1.1 Notions de logique

Définition 1. *Une* **assertion** *est un énoncé auquel on peut attribuer sans ambiguité une valeur de vérité : soit "Vrai" (noté V), soit "Faux" (noté F).*

Exemple 1.
- "1+1=2" est une assertion, sa valeur de vérité est Vrai.
- "1+1=7" est une assertion, sa valeur de vérité est Faux.
- "cet énoncé est faux" n'est pas une assertion.

Remarque 1. Le fait qu'une assertion ne puisse pas avoir une autre valeur que V ou F est en général désigné comme le "tiers exclu".

Définition 2. *Une* **proposition** *est un énoncé contenant une (ou plusieurs) variable(s) appartenant à un (ou des) ensemble(s) qui a la propriété que lorsqu'on remplace chacune des variables par un élément de l'ensemble correspondant cet énoncé devient une assertion, c'est-à-dire qu'on peut lui attribuer la valeur vrai ou faux.*

Notation 1. *On note en général $P(x)$ une proposition dont la variable est x : on rappelle ainsi que la valeur de vérité de P dépend de la valeur de x. Lorsque $P(x)$ est vraie on dit que $P(x)$ est vérifiée, ou bien que x vérifie P.*

Exemple 2. Pour en entier n, les énoncés $P(n) =$"$n + 1 = 2$", $Q(n) =$"n est un multiple de 2" et $R(n, k) =$"$n + k = 3$"sont des propositions.

Remarque 2. La valeur de vérité d'une proposition dépend de sa (ses) variable(s) : elle peut donc être vraie ou fausse selon les valeurs de celle(s)-ci.

1.2 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques usuels sont : *non*, *et*, *ou*, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Ils permettent de créer, à partir d'une (ou deux) proposition(s), un nouvelle proposition dont la valeur de vérité dépend des valeurs de vérité de la (ou des) propostion(s) la constituant.

Définition 3. *La* **négation** *de la proposition P est la proposition notée $non(P)$ qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.*

Notation 2. *La proposition $non(P)$ est aussi notée $\neg P$.*

On représente les valeurs de vérités de $non(P)$ en fonction de celles de P dans une **table de vérité**, qui est un tableau de la forme suivante :

P	$non(P)$
V	F
F	V

Exemple 3. Pour $P =$ "k est un multiple de 2", la négation est $non(P) =$"k n'est pas un multiple de 2". Qu'en est-il pour la proposition "$n = 2$" et la proposition "il y a de la pomme dans ce mélange" ?

Remarque 3. A noter que $non(non(P))$ a la même valeur de vérité que P.

Définition 4. *La* **conjonction** *de deux propositions P et Q est la proposition notée "$P \, et \, Q$" qui est vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies simultanément, et qui est fausse dans tous les autres cas.*

Notation 3. *La proposition $P \, et \, Q$ est aussi notée $P \wedge Q$.*

La table de vérité de la conjonction est :

P	Q	$P \, et \, Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 4. Si on considère la proposition $P =$ "$a = b$" et la proposition $Q =$ "$b = c$", alors la proposition "$P \, et \, Q$" est "$a = b = c$".

Exemple 5. Si on considère la proposition $P =$ "k est un multiple de 2" et la proposition $Q =$ "k est un multiple de 3", alors la proposition "$P \, et \, Q$" est "k est un multiple de 6".

Définition 5. *La* **disjonction** *de deux propositions P et Q est la proposition notée "$P \, ou \, Q$" qui est vraie si au moins une des deux propositions P et Q est vraie, et qui est fausse quand les deux propositions P et Q sont fausses simultanément.*

Notation 4. *La proposition "$P \, ou \, Q$" est aussi notée $P \vee Q$.*

La table de vérité de la disjonction est :

P	Q	$P \, ou \, Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 4. Dans le langage courant, la disjonction "ou" est en général exclusive : l'expression "fromage ou dessert" signifie qu'on a droit soit à l'un, soit à l'autre, mais pas aux deux en même temps. Le connecteur "ou" logique est pour sa part inclusif : dans l'expression "je me tais ou je vais au tableau", on peut se taire et aller au tableau...

Remarque 5. Si on veut exprimer une disjonction exclusive "soit P soit Q" (donc l'un ou l'autre, pas les deux en même temps), on peut utiliser la proposition : "$(P\, et\, non(Q))\, ou\, (non(P)\, et\, Q)$".

Exemple 6. On reprend l'exemple 5 : quelle est la valeur de vérité de "$(P\, ou\, Q)(8)$" (qui signifie "$P(8)\, ou\, Q(8)$"), "$(P\, ou\, Q)(9)$", "$(P\, ou\, Q)(10)$", "$(P\, ou\, Q)(11)$", "$(P\, ou\, Q)(12)$" ?

Définition 6. L'implication *de la proposition P vers la proposition Q est la proposition notée "$P \Rightarrow Q$" qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas.*

Notation 5. *La proposition "$P \Rightarrow Q$" se lit "P implique Q", "si P alors Q", "P entraîne Q", "P est une condition suffisante pour Q", "Q est une condition nécessaire de P".*

La table de vérité de l'implication est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 6. L'implication "$Q \Rightarrow P$" de la proposition Q vers la proposition P est appelée **implication réciproque** de l'implication "$P \Rightarrow Q$" (qu'on appelle "implication directe" dans ce cas).

Remarque 7. Lorsque l'implication "$P \Rightarrow Q$" est vraie et que P est vraie, on peut en déduire que Q est vraie : ce fait est à la base de nombreux syllogismes. Par contre lorsque l'implication "$P \Rightarrow Q$" est vraie et que Q est vraie on ne peut rien en déduire sur la vérité de P. Par exemple, la proposition "$(1{=}0) \Rightarrow (0{=}0)$" est vraie et $0 = 0$ est vraie mais $1 = 0$ est fausse.

Exemple 7. Le postulat de Descartes, "je pense donc je suis", peut se réécrire "je pense $\Rightarrow$ je suis".

Définition 7. L'équivalence *des deux propositions P et Q est la propostion notée $P \Leftrightarrow Q$ qui est vraie quand les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses, et qui est fausse dans les autres cas.*

Remarque 8. La notation $P \Leftrightarrow Q$ se lit "P et Q sont équivalentes", "P équivaut à Q", "P si et seulement si Q" ou encore "P est une condition nécessaire et suffisante pour Q".

La table de vérité de l'équivalence est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 8. La proposition "$(1{=}1) \Leftrightarrow (0{=}0)$" est vraie, la proposition "$(1{=}0) \Leftrightarrow (2{=}0)$" est vraie, par contre la proposition "$(1{=}0) \Leftrightarrow (0{=}0)$" est fausse.

Exemple 9. Illustration de l'emploi de l'équivalence de deux propositions pour la résolution du sytème suivant par la méthode du pivot de Gaus :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y-z & = & 3 \\ 2x+3y+2z & = & 1 \\ x+2y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

Cette résolution se fait en écrivant des systèmes équivalents, obtenus par transformation selon la méthode du pivot de Gauss : à chaque étape on choisit une ligne parmi celles non encore utilisées, on choisit un pivot dans cette ligne, qu'on élimine des autres lignes non encore utilisées (par substitution ou addition de lignes) et on recommence jusqu'à obtenir un système triangulaire. On résoud alors le système triangulaire et on vérifie qu'on a vraiment trouvé une solution en revenant au système initial.

1.3 Equivalence logique

Définition 8. *Deux propositions P et Q sont* **logiquement équivalentes** *si P est vraie lorsque Q est vraie, et si P est fausse lorsque Q est fausse. Cette relation est notée $P \equiv Q$.*

1.1. Propriété– Caractérisation de l'équivalence logique.

Deux propositions P et Q sont logiquement équivalentes si et seulement si elles ont la même table de vérité.

Remarque 9. L'équivalence logique de deux propositions P et Q est une relation entre ces deux propositions : cela ne forme pas une nouvelle proposition (comme l'équivalence vue plus haut).

1.2. Propriété– Equivalences logiques usuelles.

Soit trois propositions P, Q et R, alors les propositions suivantes son logiquement équivalentes :

a) Double négation : $non(non(P)) \quad \equiv \quad P$

b) $non(P\,et\,Q) \quad \equiv \quad non(P)\,ou\,non(Q)$

c) $non(P\,ou\,Q) \quad \equiv \quad non(P)\,et\,non(Q)$

d) $P\,et\,(Q\,ou\,R) \quad \equiv \quad (P\,et\,Q)\,ou\,(P\,et\,R)$

e) $P\,ou\,(Q\,et\,R) \quad \equiv \quad (P\,ou\,Q)\,et\,(P\,ou\,R)$

f) L'équivalence est une double implication :

$$P \Leftrightarrow Q \quad \equiv \quad (P \Rightarrow Q)\,et\,(Q \Rightarrow P)$$

g) Autre définition de l'implication :

$$P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad non(P)\,ou\,Q$$

h) Contraposée :

$$P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad non(Q) \Rightarrow non(P)$$

i) $non(P \Rightarrow Q) \quad \equiv \quad P\,et\,non(Q)$.

Exemple 10. On traite les exemples suivants : “non(k est un multiple de 2 et k est un multiple de 3)”, “non(fromage et dessert)”, “non(je me tais ou je vais au tableau)”. Contraposée et négation des implications : “si je me suis rasé le matin alors j'ai l'air réveillé”, “si on veut (alors) on peut”, “(k^2 est impair) $\Rightarrow$ (k est impair)”.

Remarque 10. La contraposée (point *h)* ci-dessus) est donc une réécriture de l'implication : elle permet parfois de simplifier l'énoncé, par exemple : la contraposée de “(k^2 est impair) $\Rightarrow$ (k est impair)” est “(k est pair) $\Rightarrow$ (k^2 est pair)”. Elle exprime aussi le fait suivant : dire que “P est une condition suffisante pour Q” (c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$) est logiquement équivalent à dire que “$non(P)$ est une condition nécessaire pour $non(Q)$” (c'est-à-dire $non(Q) \Rightarrow non(P)$).

1.4 Quantificateurs logiques

Définition 9. *Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x. Le* **quantificateur universel***, noté $\forall$, permet de former la proposition “$\forall x \in X,\ P(x)$” qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de X, et qui est fausse si $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de X.*

Remarque 11. “$\forall x \in X,\ P(x)$” se lit “pour tout x dans X la proposition $P(x)$ est vérifiée”, ou “tout élément x de X vérifie P” ou “quel que soit x dans X la proposition $P(x)$ est vérifiée”.

Définition 10. *Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x. Le* **quantificateur existentiel***, noté $\exists$, permet de former la proposition “$\exists x \in X,\ P(x)$” qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de X, et qui est fausse si $P(x)$ est fausse pour tous les éléments de X.*

Remarque 12. “$\exists x \in X,\ P(x)$” se lit “il existe x dans X tel que la proposition $P(x)$ est vérifiée”, ou “il existe x dans X qui vérifie P”.

Exemple 11. On considère la proposition $P(x) =$ ”$x \geq 0$”. Alors la proposition “$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$” est fausse et la proposition “$\exists x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$” est vraie.

1.3. Propriété– Négation des quantificateurs.

Soit une proposition P, alors on a les équivalences logiques :

$$non(\forall x \in X,\ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in X,\ non(P(x)),$$

$$non(\exists x \in X,\ P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in X,\ non(P(x)).$$

Exemple 12. La proposition “$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$” est fausse et sa négation “$\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$” est vraie.

Exemple 13. La proposition “$\forall x \geq 0,\ x \geq 1$” est fausse et sa négation “$\exists x \geq 0,\ x < 1$” est vraie.

Exemple 14. La négation de “toutes les pommes du panier sont vertes” est “il y a une pomme dans le panier qui n'est pas verte” : la négation de “Tous (...)” n'est pas “Aucun (...)” mais plutôt “Il existe au moins un pour lequel on n'a pas (...)”.

Exercice 1 (examen deuxième session 2013)**.** On considère la proposition : "si tous les insectes ont six pattes alors les araignées ne sont pas des insectes". Écrire la contraposée et la négation de cette proposition.

Remarque 13. Par convention, la proposition "$\forall x \in \emptyset,\ P(x)$" est toujours vraie (il n' y a rien à vérifier puisque l'ensemble vide n'a pas d'éléments) et la proposition "$\exists x \in \emptyset,\ P(x)$" est toujours fausse (il n'existe aucun élément dans l'ensemble vide)

1.4. Propriété– Utilisation des quantificateurs.

Soit une proposition $P(x, y)$ dépendant de deux variables, alors on a les équivalences logiques :

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \forall y \in Y,\ P(x,y) &\equiv \forall y \in Y, \forall x \in X,\ P(x,y) \\ \exists x \in X, \exists y \in Y,\ P(x,y) &\equiv \exists y \in Y, \exists x \in X,\ P(x,y) \end{aligned}$$

Remarque 14. Par contre, la proposition "$\forall x \in X, \exists y \in Y,\ P(x, y)$" signifie que pour tout x il existe une valeur y (qui dépend a priori de x) telle que $P(x, y)$ est vérifiée, alors que "$\exists y \in Y, \forall x \in X,\ P(x, y)$" signifie qu'il existe une valeur de y telle que $P(x, y)$ est vérifiée pour toutes les valeurs de x dans X.

Exemple 15. Rappel sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. On considère les deux propositions "$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z},\ y = x + 1$" et "$\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z},\ y = x + 1$". Que dire par ailleurs de la proposition "$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ y = x + 1$" ?

1.5 Techniques de démonstration

1.5.1 Preuve directe d'une implication.

Soit P et Q deux propositions données. Démontrer l'implication "$P \Rightarrow Q$" consiste à vérifier / démontrer que cette implication est vraie. La **preuve directe** de l'implication $P \Rightarrow Q$ consiste à supposer que P est vraie et à démontrer (par un raisonnement déductif) que Q est vraie : dans ce cas cela montre que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie (rappelons que quand P est fausse cette implication est de toute manière vraie).

Exemple 16. On démontre par preuve directe que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$ l'implication suivante est vérifiée :

$$k \text{ est impair} \quad \Rightarrow \quad k^2 \text{ est impair}$$

1.5.2 Preuve par contraposée d'une implication.

Soit P et Q deux propositions données. **Démontrer** l'implication "$P \Rightarrow Q$" **par la contraposée** (ou par contraposition) consiste à démontrer que sa contraposée $non(Q) \Rightarrow non(P)$ est vraie (pour cela, on emploie la preuve directe). Rappellons qu'une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes, donc elle sont vraies (ou fausses) simulanément : en ce sens il revient au même de démontrer l'une ou l'autre.

Exemple 17. On démontre par la contraposée que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$ l'implication suivante est vérifiée :

$$k^2 \text{ est pair} \quad \Rightarrow \quad k \text{ est pair}$$

1.5.3 Preuve par l'absurde.

Soit P une proposition. La **démonstration par l'absurde** de P consiste à supposer que P est fausse et à en déduire une absurdité, une contradiction.

Exemple 18. La preuve classique de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$, qui remonte à Euclide, est une preuve par l'absurde.

1.5.4 Preuve par récurrence.

Soit k un entier (en général positif) et P une proposition, faire une **démonstration par récurrence** de la proposition

$$\forall n \geq k, \quad P(n)$$

consiste à procéder en deux étapes :

- initialisation : on vérifie $P(k)$ (on démontre que $P(k)$ est vraie),
- hérédité : on fixe $n \geq k$ et on suppose que $P(n)$ est vraie, on démontre alors que $P(n+1)$ est aussi vraie.

Ces deux étapes suffisent à démontrer $\forall n \geq k, \quad P(n)$.

Exemple 19. Soit a un nombre réel différent de 0 et 1, on considère la suite géométrique (x_n) de raison a :

$$\begin{cases} x_0 \text{ fixé} \\ \forall n \geq 0,\ x_{n+1} = a x_n \end{cases}$$

alors $x_n = a^n x_0$ pour tout $n \geq 0$.

1.6 Lien avec la théorie des ensembles

On rappelle d'abord quelques ensembles classiques :

- l'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$
- l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}$
- l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q}$
- l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} = -]\infty, +\infty[$
- l'ensemble des nombres réels positifs : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$
- l'ensemble des nombres réels strictement positifs : $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

Le vocadulaire de base de la théorie des ensembles est le suivant :

Notation 6. *La proposition "$x \in X$" se lit "x est un élément de X", "x appartient à X" ou "x est dans X". L'ensemble vide $\emptyset$ est l'ensemble n'ayant aucun élément.*

Définition 11. *Soit A et B deux ensembles.*

- Inclusion *: A est inclus dans B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est aussi un élément de B.*
- Egalité *: A et B sont égaux, noté $A = B$, s'ils ont les mêmes éléments.*
- Complémentaire *: le complémentaire de A dans B est l'ensemble noté $B \backslash A$ composé des éléments de B qui ne sont pas dans A.*
- Intersection *: l'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ composé des éléments qui appartiennent à la fois à A et B.*
- Réunion *: la réunion de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ composé des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux simultanément.*

Notation 7. *La notation "$A \subset B$" se lit aussi "A est une partie de B". La notation "$A \cap B$" se lit "A inter B", et la notation "$A \cup B$" se lit "A union B".*

Notation 8. *La notation "$B \setminus A$" se lit aussi "B moins A", et est parfois notée $\complement_B(A)$, voire $\overline{A}$ si $A \subset B$ et qu'on n'éprouve pas la nécéssité de préciser B.*

Exemple 20. On considère les ensembles $A = [-1, 2[$ et $B = [0, 3]$. A-t-on $A \subset B$ ou $B \subset A$? Expliciter $A \cap B$ et $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

On peut réécrire ces relations et opérations sur les ensembles de la manière suivante :

1.5. Propriété– Ensembles et quantificateurs.

Soit A et B deux ensembles, alors on a les équivalences logiques :

$$A \subset B \quad \equiv \quad \forall a \in A,\ a \in B,$$

$$\begin{aligned}
A = B \quad &\equiv \quad (A \subset B)\, et\, (B \subset A), \\
A \subset B \quad &\equiv \quad (x \in A) \Rightarrow (x \in B), \\
A = B \quad &\equiv \quad (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B), \\
x \in A \setminus B \quad &\equiv \quad (x \in A)\, et\, (x \notin B) \\
x \in A \cap B \quad &\equiv \quad (x \in A)\, et\, (x \in B) \\
x \in A \cup B \quad &\equiv \quad (x \in A)\, ou\, (x \in B)
\end{aligned}$$

Remarque 15. L'interprétation en termes de quantificateurs des propositions " $A \cap B$" et " $A \cup B$" est à rapprocher de leur lecture en termes d'événements dans le domaine des probabilités, où " $A \cap B$" se lit "A et B" et " $A \cup B$" se lit "A ou B"

Exemple 21. Un exemple classique d'utilisation des équivalences logiques précédentes est la démonstration des identités suivantes :

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)\,; \qquad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)\,.$$

On peut l'appliquer par exemple pour $A = [-1, 2[$, $B = [0, 3]$ et $E = \mathbb{R}$.