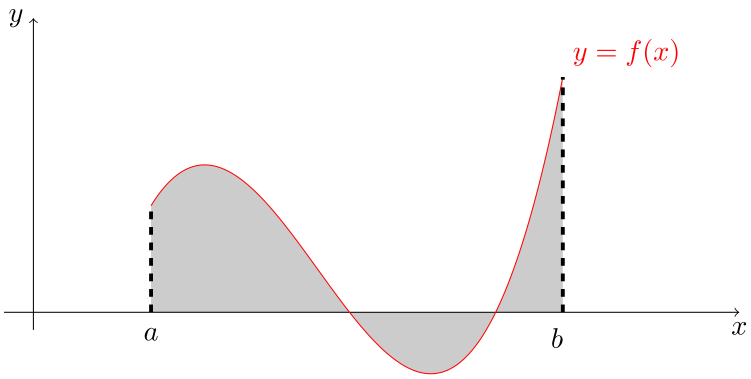
5 Intégrale et primitive

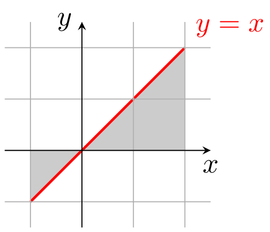
5.1 Intégrale d'une fonction continue

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ délimitent une région du plan (qui peut être en plusieurs morceaux si f s'annule), représentée en gris dans l'exemple ci-dessous :



On peut associer à cette région du plan comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses son aire *signée* : on dit *signée* parcequ'on compte en positif l'aire de la zone qui se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, et en négatif la partie qui se trouve au-dessous.

Exemple 92. On considère par exemple le cas $a = -1$, $b = 2$ et $f(x) = x$. L'aire signée de la partie du plan comprise entre le graphe de $f(x) = x$ et l'axe des abscisses sur $[-1, 2]$ vaut alors $\frac{3}{2}$:



l'aire du petit triangle sous l'axe des abscisses est égale à $\frac{1}{2}$, elle est comptée pour $-\frac{1}{2}$, et l'aire du grand triangle au-dessus de l'axe des abscisses est égale à 2, elle est comptée pour +2. L'aire signée vaut donc $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.

Comme on va le voir, cette aire signée a une grande importance en mathématiques, c'est pour cette raison qu'on introduit la notion suivante :

Définition 52. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, on appelle* **intégrale de f sur le segment** $[a, b]$ *l'aire signée de la partie du plan qui se trouve entre le graphe de la fonction f sur $[a, b]$ et l'axe des abscisses. On note ce nombre* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 40. Par convention on pose $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, et si $a < b$ alors la notation $\displaystyle\int_b^a f(t)dt$ désigne le nombre $-\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

On déduit les propriétés suivantes de la définition l'intégrale en terme d'aire signée :

5.1. Propriété – Intégrale 1.

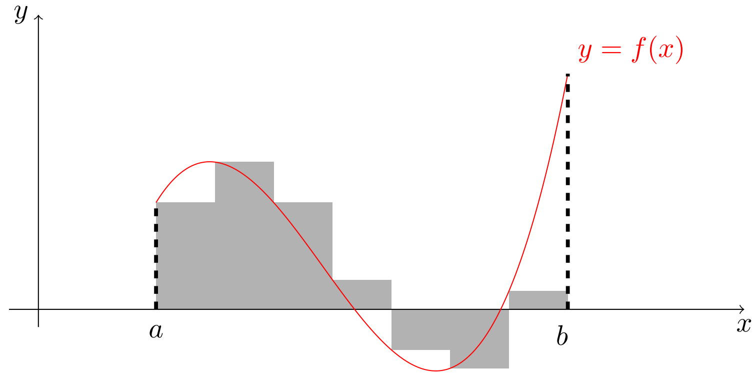
Soit $a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors :

- Relation de Chasles : pour tout $c \in [a, b]$ on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$
- Intégrale d'une constante : si α est un nombre réel fixé et $f(x) = \alpha$ pour tout $x \in [a, b]$ alors
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \alpha\, dt = \alpha(b - a)$$
- Si g est continue sur $[a, b]$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans $[a, b]$ alors
$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$
En particulier, si m et M sont deux constantes telles que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ alors
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$$
Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est appelé *valeur moyenne de f sur $[a, b]$.*
- Lien avec la parité : on suppose $a \geq 0$, si f est une fonction paire sur $[-a, a]$ alors
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$$
et si f est impaire sur $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Exemple 93. Si on reprend l'exemple 92, comme $f(x) = x$ alors on a $-1 \leq f(x) \leq 2$ pour tout x dans $[-1, 2]$ et on voit que la valeur moyenne de f sur $[-1, 2]$, qui vaut $\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^2 f(t)dt = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ est bien entre -1 et 2.

Une autre manière de définir l'intégrale de f sur $[a, b]$ est la suivante : on associe à la fonction f la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de terme général
$$I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Géométriquement, I_n est la somme des aires des n rectangles construits à partir de f de la manière suivante :



Exemple 94. Si on reprend à nouveau l'exemple 92 on a alors $b - a = 2 - (-1) = 3$ et on peut calculer

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{3}{1} f\left(-1 + 0 \times \frac{3}{1}\right) = 3f(-1) = 3 \times (-1) = -3 \\
I_2 &= \frac{3}{2} f\left(-1 + 0 \times \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} f\left(-1 + 1 \times \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} f(-1) + \frac{3}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \\
I_3 &= \frac{3}{3} f\left(-1 + 0 \times \frac{3}{3}\right) + \frac{3}{3} f\left(-1 + 1 \times \frac{3}{3}\right) + \frac{3}{3} f\left(-1 + 2 \times \frac{3}{3}\right) \\
&= f(-1) + f(0) + f(1) = 0 \\
I_n &= \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(-1 + k\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-1 + k\frac{3}{n}\right) \\
&= \frac{3}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1) + \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right] = \frac{3}{n} \left[-n + \frac{3}{n} \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{3}{2} - \frac{9}{2n}
\end{aligned}$$

Dans ce cas la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est la suite de terme général $I_n = \frac{3}{2} - \frac{9}{2n}$.

On peut démontrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie est toujours convergente, et plus précisément que sa limite est l'aire signée de la partie du plan qui se trouve entre le graphe de la fonction f sur $[a, b]$ et l'axe des abscisses : c'est donc l'intégrale de f sur $[a, b]$. On a alors la propriété :

5.2. Propriété – Intégrale 2.

Soit $a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Exemple 95. On reprend l'exemple 92 : dans ce cas, puisque la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est la suite de terme général $I_n = \frac{3}{2} - \frac{9}{2n}$ on voit que sa limite est bien $\frac{3}{2}$, qui est effectivement l'aire signée de la partie du plan comprise entre le graphe de $f(x) = x$ et l'axe des abscisses sur $[-1, 2]$.

Comme conséquence de la propriété 5.2 on déduit les propriétés suivantes de l'intégrale :

5.3. Propriété – Linéarité de l'intégrale.

Soit $a < b$ et soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$, alors :

- pour tout nombre réel α fixé on a
$$\int_a^b \alpha\, f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$
- de plus
$$\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Remarque 41. Par exemple, pour calculer l'aire signée de la région du plan entre les graphes de f et g, il suffit de calculer la différence des aires :

$$\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b [f(t) - g(t)]dt.$$

5.2 Primitive d'une fonction continue

D'après ce qui précède, si une fonction f est continue sur un intervalle I et si a est un élément de I, alors pour tout x dans I le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$ si $x \leq a$) est contenu dans I et la fonction f est continue sur $[a, x]$, on peut donc calculer l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$. Cela permet ainsi de définir une nouvelle fonction F sur I par la formule

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On a alors le résultat suivant :

5.4. Théorème– Intégrale et primitive.

Si f est continue sur l'intervalle I, alors la fonction F définie sur I par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée est $F'(x) = f(x)$.

Esquisse de démonstration dans le cas où f est croissante sur I. Soit x dans I, alors pour démontrer que $F'(x) = f(x)$ on doit vérifier que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Pour cela, on doit vérifier que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

On démontre seulement que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Soit $h>0$, d'après la relation de Chasles, on a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Si f est croissante alors $f(x) \leq f(t) \leq f(x+h)$ pour tout t dans $[x, x+h]$ et donc la valeur moyenne $\dfrac{1}{(x+h)-x}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ est aussi entre ces deux valeurs :

$$f(x) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x+h)$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, le théorème des gendarmes implique que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$, ce qui termine la démonstration dans ce cas. □

Exemple 96. Soit α un nombre réel, on considère la fonction constante égale à α sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \alpha$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Soit a un nombre réel, si on définit la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \alpha\, dt = \alpha(x-a)$$

et donc on a bien $F'(x) = \alpha = f(x)$ pour tout réel x

A partir de ce résultat, on définit la notion de primitive ;

Définition 53. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, une fonction F définie sur I est une* **primitive de f sur I** *si F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $F' = f$.*

Le lien entre primitive et intégrale est résumé dans le théorème suivant ;

5.5. Théorème– Intégrale et primitive.

Si f est continue sur l'intervalle I et si a est dans I, alors l'unique primitive F de f qui est définie sur I et qui s'annule au point a est la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Toute autre primitive de f s'écrit alors sous la forme

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt + c$$

où c est un nombre réel fixé.

Notation 14. *Par abus de notation, on note souvent $\int f$ ou $\int f(x)dx$ pour désigner une primitive de f. En particulier, l'expression $\int g(t)dt = G(x)$ signifie que G est une primitive de g, ou autrement dit que g est la dérivée de G, c'est-à-dire $G' = g$.*

Exemple 97. Les primitives classiques suivantes sont à connaitre :

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pour } a \neq -1 & \text{et} & \displaystyle\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ pour } \alpha \neq -1 \\
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) \text{ sur }]0,+\infty[& \text{et} & \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) \text{ si } f \text{ est positive} \\
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) \text{ sur }]-\infty,0[& \text{et} & \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(-f(x)) \text{ si } f \text{ est négative} \\
\displaystyle\int e^x\,dx = e^x & \text{et} & \displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} \\
\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) & \text{et} & \displaystyle\int \sin(f(x)) f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) \\
\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) & \text{et} & \displaystyle\int \cos(f(x)) f'(x)\,dx = \sin(f(x))
\end{array}$$

En particulier, la première règle s'applique avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et on obtient :

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x}$$

en se souvenant que $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Remarque : en lisant ces primitives *à rebours*, on retrouve les règles pour dériver : par exemple comme une primitive de $e^{f(x)} f'(x)$ est $e^{f(x)}$, on en conclut que la dérivée de $e^{f(x)}$ est $e^{f(x)} f'(x)$.

Exemple 98. Pour $\alpha = 2$, l'exemple ci-dessus indique que $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$, et donc la primitive de x^2 qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,dt$. De même la primitive de x^2 qui s'annule en 1 est $x \mapsto \displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ et par la relation de Chasles on a

$$\int_1^x t^2\,dt = \int_1^0 t^2\,dt + \int_0^x t^2\,dt = \int_0^x t^2\,dt + c$$

avec $c = \displaystyle\int_1^0 t^2\,dt$.

5.3 Calcul d'intégrale

Le calcul d'une intégrale, comme on l'a vu précédent, peut avoir pour intérêt de calculer une primitive, ce qui est une de ses applications principales, surtout dans la résolution des Equations Différentielles. Une autre raison peut être tout simplement d'évaluer l'intégrale pour elle-même. C'est par exemple le cas lorsqu'on calcule l'intégrale d'une dérivée : si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et que sa dérivée f' est continue, alors f est une primitive de f'... En particulier, si a est un point dans I, alors f est la primitive de f' qui prend la valeur $f(a)$ au point a, et on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

pour tout x dans I. La relation ci-dessus est la **formule fondamentale du calcul différentiel**. En général, on la réécrit en utilisant la notation

$$[f]_a^x = f(x) - f(a)$$

ce qui donne le résultat ;

5.6. Théorème – Formule fondamentale du calcul différentiel.

Soit f une fonction dont la dérivée est continue sur le segment $[a, b]$, alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = [f]_a^b = f(b) - f(a)$$

Exemple 99. On considère un objet ponctuel qui se déplace sur la droite des réels. Sa position à l'instant t est le nombre $x(t)$. Si on connait le point de départ $x(0)$ à l'instant $t = 0$ de cet objet ponctuel ainsi que sa vitesse $v(t)$ pour tout instant t, on sait que cette vitesse est la dérivée de sa position et donc $x'(t) = v(t)$ pour tout t. En particulier, la position de l'objet à l'instant $t = 1$ est

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t)dt = x(0) + \int_0^1 x'(t)dt$$

Pour calculer une intégrale, en plus de la formule fondamentale du calcul différentiel et des formules de primitives, on a l'outil suivant ;

5.7. Théorème – Intégration par parties.

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables sur le segment $[a, b]$, alors on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)g(t)dt &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt \end{aligned}$$

Exemple 100. Par exemple, si on a $f(x) = x^2$ et $g(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$ et donc pour $a = 1$ et $b = 2$ on a

$$\begin{aligned} \int_1^2 2t\ln(t)dt &= \left[t^2\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 t^2\frac{1}{t}dt \\ &= 2^2\ln(2) - 1^2\ln(1) - \int_1^2 tdt = 4\ln(2) - 0 - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 \\ &= 4\ln(2) - \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = 4\ln(2) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

6 Equations différentielles du premier ordre

6.1 Introduction : exemple de la dynamique des populations

Pour appréhender la notion d'équation différentielle, nous allons commencer par considérer un exemple illustrant comment apparait ce type d'équation en sciences.

On considère une population constituée d'un très grand nombre d'individus : par exemple s'il s'agit d'organismes unicellulaires étudiés en laboratoire, on a facilement 10^5 à 10^6 individus. On choisit une unité qui est de l'ordre de grandeur de la taille de cette population à l'instant initial $t = 0$ (par exemple 1 unité représentera 10^5 individus) et on note $y(t)$ le nombre d'individus de cette population à l'instant t dans cette nouvelle unité. Le nombre $y(t)$ est un nombre décimal (à virgule) en raison de l'unité choisie : si à l'instant $t = 2$ il y $147233 = 1,47233.10^5$ individus alors $y(2) = 1,47233$. On veut étudier la fonction $t \mapsto y(t)$ lorsque t varie entre 0 et $+\infty$ (disons pour de grandes valeurs de t). Pour pouvoir modéliser l'évolution de y en fonction de t on fait les deux approximations suivantes :

1. *Première approximation.* On considère que $y(t)$ est un nombre qui évolue continuement dans le temps : par exemple, si l'unité est 10^5, la valeur de $y(t)$ ne "saute" pas de $1,00001$ (qui représente 100001 individus) à 1,00002 (qui représente 100002 individus) mais passe par toutes les valeurs intermédiaires comme $1,0000143483873$ (ce qui n'a pas vraiment de sens en terme de nombre d'individus ...).
2. *Deuxième approximation.* On suppose que pour tout instant $t \geq 0$ on connait le taux d'accroissement $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$ au cours du temps entre les deux instants t et $t + h$ (où $h > 0$), qu'on suppose très proches (c'est-à-dire qu'on suppose que h est presque égal à 0 : $h \simeq 0$). A priori ce taux d'accroissement dépend du nombre d'individus de la population entre les deux instants t et $t + h$, et comme $h \simeq 0$ on prend $y(t)$ comme population de référence sur cet intervalle de temps.
   - Dans un premier temps, on suit l'hypothèse de *Malthus (1765-1835)*, qui suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel à $y(t)$ avec un rapport de proportionnalité fixe égal à une constante r :
   $$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = r\, y(t)$$
   Comme h est très proche de 0, on passe à la limite quand h tend vers 0 dans cette équation, et par définition de la dérivée on obtient
   $$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = r\, y(t)$$
   Cette relation doit être vraie pour tout instant $t \geq 0$, on obtient donc l'équation
   $$\forall t \geq 0, \qquad y'(t) = r\, y(t)$$
   qu'on écrit plus simplement
   $$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$
   C'est ce qu'on appelle une *équation différentielle linéaire d'ordre 1.* La difficulté particulière de ce type d'équation est que l'inconnue de cette équation n'est pas un nombre réel (comme dans l'équation $2x + 3 = -7$) mais une fonction : c'est la fonction y que l'on cherche à déterminer !

On verra dans la suite que la seule solution de cette équation qui prend la valeur y_0 à l'instant 0 est la fonction

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Dans ce modèle dû à Malthus, on voit que si le taux r est strictement positif alors $y(t)$ tend très vite vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ (la fonction y a une croissance exponentielle dans ce cas) et que si r est strictement négatif alors $y(t)$ tend très vite vers 0 quand t tend vers $+\infty$ (la fonction y a alors une décroissance exponentielle). Ainsi, selon que la population a un taux d'accroissement positif ou négatif, son nombre d'individus croît très vite vers de grandes valeurs ou au contraire diminue très vite vers 0.

- On va maintenant faire une hypothèse plus fine sur le taux d'accroissement de la population, qui a été proposée par *Verhulst (1804-1849)*, et qui consiste à supposer que le rapport de proportionnalité r n'est pas constant au cours du temps mais varie en sens inverse de $y(t)$ (cela correspond par exemple au fait que lorsque la population grandit, les ressources pour qu'elle se reproduise diminuent, et inversement si la population diminue elle dispose de plus de ressources pour se développer). Dans le modèle le plus simple, on suppose que $r(t) = \alpha\,(K - y(t))$ où α et K sont des constantes positives. On obtient alors le taux d'accroissement

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \alpha\,(K - y(t))\,y(t)$$

et en passant à la limite quand h tend vers 0 on a

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \alpha\,(K - y(t))\,y(t)$$

c'est-à-dire que cette fois on obtient *l'équation différentielle d'ordre 1*

$$y' = \alpha\,(K - y)\,y \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.$$

On peut vérifier que la solution de cette équation qui vaut y_0 à l'instant 0 est la fonction

$$y(t) = \frac{K\,y_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-\alpha K t}}$$

Cette fois, comme $\alpha\,K > 0$, on voit que lorsque t tend vers $+\infty$ la fonction $y(t)$ tend vers la valeur limite K, qui représente d'une certaine manière l'ensemble des ressources disponibles : la population exploite au mieux son environnement.

6.2 Etude des équations différentielles du premier ordre

On a vu dans la section précédente l'exemple le plus classique d'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

Plus généralement, une **équation différentielle** est une équation qui fait intervenir une fonction y et certaines de ses dérivées (par exemple sa dérivée première y', sa dérivée seconde y'', et parfois les dérivées de ces dérivées), et qui doit être valable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit d'une équation différentielle qu'elle est **d'ordre 1** si elle ne fait intervenir que y et sa dérivée première y'. On dit qu'une équation différentielle qu'elle est **d'ordre 2** si elle ne fait intervenir que y, sa dérivée première y' et sa dérivée seconde y''.

Exemple 101. Les équations différentielles

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

et

$$y' = \alpha\,(K - y)\,y \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.$$

sont des équations d'ordre 1 puisqu'elles ne font intervenir que y et y'.

Définition 54. *Une équation différentielle* **linéaire** *d'ordre 1 est une équation du type*

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{pour tout } t \in I$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b sont deux fonctions définies sur I.

Exemple 102. L'équation différentielle

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, par contre l'équation différentielle

$$y' = \alpha\,(K - y)\,y = \alpha\,K\,y - \alpha\,y^2 \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.$$

n'est pas linéaire à cause du terme y^2.

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 peuvent être résolues, comme le montre ce théorème :

6.1. Théorème — Equations différentielles linéaires.

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(E) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \text{pour tout } t \in I$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b sont des fonctions continues sur I.
Soit t_0 un réel dans I et y_0 un réel, alors il existe une unique solution $y(t)$ de cette équation différentielle qui vaut y_0 au temps t_0.
Dans le cas particulier où $b = 0$, l'unique solution $y(t)$ de cette équation différentielle qui vaut y_0 au temps t_0 est donnée par la formule

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

Dans le cas où $b \neq 0$, si on connait une solution $Y(t)$ de cette équation différentielle (E) alors toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = Y(t) + \beta \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

pour un nombre réel β.

Définition 55. *Si on considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1*

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{pour tout } t \in I$$

alors l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \textit{pour tout } t \in I$$

est appelée **équation homogène associée***.*

Exemple 103. Si on considère l'équation différentielle

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

on peut la réécrire

$$y'(t) - r\,y(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty[$$

Dans ce cas a est la fonction constante égale au nombre $-r$, donc $a(t) = -r$ pour tout $t \geq 0$. D'après le théorème, l'unique solution y de cette équation qui vaut y_0 à l'instant $t_0 = 0$ est la fonction

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = y_0 \exp\left(-\int_{0}^{t} -rds\right)$$

et comme une primitive de la fonction constante $a(s) = -r$ est la fonction $s \mapsto -rs$ on trouve

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\left[-rs\right]_0^t\right) = y_0 \exp\left(-((-r \times t) - (-r \times 0))\right) = y_0\, e^{r\,t}$$

qui est bien la solution annoncée dans la section introductive.

Lorsque la fonction b n'est pas nulle, le théorème précédent ne donne pas de formule pour calculer une solution Y de l'équation. Pour en calculer une, on applique la méthode de la variation de la constante. Cette méthode consiste à chercher une solution $Y(t)$ de l'équation (E) sous la forme

$$Y(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

En dérivant cette fonction Y et en utilisant l'équation (E) on obtient une équation qui fait intervenir la dérivée de C, ce qui permet en général de trouver une formule pour C, et donc d'obtenir Y.

Exemple 104. On reprend le modèle de Malthus, mais cette fois on suppose qu'il y a une mortalité de la population qui donne par exemple l'équation

$$(E') \qquad y'(t) = r\,y(t) - \alpha t \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty[$$

avec $\alpha > 0$. Dans ce cas on voit que $a(t) = -r$ et $b(t) = -\alpha t$, et on a déjà calculé $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = e^{rt}$. On cherche donc une solution $Y(t)$ de (E') sous la forme

$$Y(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = C(t)e^{rt}$$

En dérivant Y on obtient

$$Y'(t) = C'(t)e^{rt} + C(t)r\,e^{rt} = C'(t)e^{rt} + r\,Y(t)$$

et comme Y doit être une solution de (E') on sait que $Y'(t) = r\,Y(t) - \alpha t$, donc en rassemblant ces deux équations on obtient $C'(t)e^{rt} = -\alpha t$ et donc $C'(t) = -\alpha\, t\, e^{-rt}$. On peut calculer une primitive de $-\alpha\, t\, e^{-rt}$ en intégrant par parties, et on trouve par exemple $C(t) = \dfrac{\alpha}{r}\left(t + \dfrac{1}{r}\right) e^{-rt}$ et donc une solution de (E') est

$$Y(t) = C(t)e^{rt} = \frac{\alpha}{r}\left(t + \frac{1}{r}\right)$$

et toutes les solutions de (E') sont de la forme

$$y(t) = \frac{\alpha}{r}\left(t + \frac{1}{r}\right) + \beta\, e^{rt}$$

pour un réel β.