4 Etude des fonctions numériques

4.1 Limites des fonctions numériques

Dans ce qui suit, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction numérique définie sur son ensemble de définition D_f.

Définition 36 (limite en un point)**.** *Soit l un nombre réel. On dit que* **la limite de f en a est égale à** *l si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \qquad |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

On dit que **la limite de f en a est égale à** $+\infty$ *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \qquad |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On dit que **la limite de f en a est égale à** $-\infty$ *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \qquad |x - a| < \delta \implies f(x) < M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Notation 13. *Par abus de langage, on dit souvent* la limite de $f(x)$ quand x tend vers a *plutôt que* la limite de f en a.

Remarque 31. Au lycée, on dit que la limite de f en a est égale à l si *tout intervalle ouvert I qui contient l contient toutes les valeurs $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a*. La définition ci-dessus exprime cette condition en termes mathématiques précis.

Exemple 54. On a les limites classiques suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Remarquez qu'aucune de ces fonctions n'est définie en 0, ce qui n'empêche pas de calculer une limite. Par contre la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 : quand x s'approche de 0, elle oscille "de plus en plus vite" entre -1 et 1.

Définition 37 (limite en un point par valeurs supérieures ou inférieures)**.** *Dans cette définition l désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$.*
On dit que **la limite de f en a par valeurs supérieures est égale à** *l si la restriction de f à $[a, +\infty[$ a pour limite l quand x tend vers a. Dans ce cas on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = l \qquad ou \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

On dit que **la limite de f en a par valeurs inférieures est égale à** l *si la restriction de* f *à* $]-\infty, a]$ *a pour limite* l *quand* x *tend vers* a.

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\leq a}} f(x) = l \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

Remarque 32. Lorsqu'on étudie la limite de f en a par valeurs supérieures (ou inférieures), on ne s'intéresse donc qu'aux valeurs de $f(x)$ pour x proche de a et supérieur à a. Cela permet souvent de préciser des comportements de $f(x)$ qui peuvent être différents selon que x s'approche de a par au-dessus ou par au-dessous, comme pour la fonction inverse en 0 puisque :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\geq 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemple 55. Pour la fonction Logarithme Népérien, on a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Définition 38 (limite en $+\infty$)**.** *Soit* l *un nombre réel. On dit que* **la limite de f en $+\infty$ est égale à** l *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \qquad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$.

On dit que **la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \qquad f(x) > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

On dit que **la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \qquad f(x) < M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

On définit de même la notion de limite en $-\infty$:

Définition 39 (limite en $-\infty$)**.** *Soit* l *un nombre réel. On dit que* **la limite de f en $-\infty$ est égale à** l *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \qquad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$.

On dit que **la limite de f en $-\infty$ est égale à $+\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \qquad f(x) > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

On dit que **la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \qquad f(x) < M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque 33. Comme en terminale, le fait que la limite de f en $+\infty$ est égale à l correspond au cas où *tout intervalle ouvert qui contient l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment grand* (où suffisamment grand pourrait se dire "suffisamment proche de $+\infty$").

Exemple 56. On a aussi les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

4.2 Règle de calcul des limites

On a les règles de calcul suivantes.

4.1. Propriété – opérations sur les limites.
On désigne par a soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions numériques ayant chacune une limite en a, alors on a les égalités suivantes, à condition que la quantité de droite existe :

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Exemple 57. Grâce aux règles de calcul ci-dessus, on obtient par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

Le résultat précédent ne permet pas de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$, cependant on connait la limite de cette forme indéterminée, ainsi que d'autres croissances comparées entre polynômes, logarithme et exponentielle :

4.2. Propriété – croissances comparées polynômes /exp / ln.
Pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty;$$

Exemple 58. Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$

Remarque 34. Comme pour les suites, la limite du quotient de deux polynômes est celle de la limite du quotient des deux termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0}{b_lx^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_kx^k}{b_lx^l} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<l \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{si } k=l \\ +\infty & \text{si } k>l \text{ et } a_k \text{ du même signe que } b_l \\ -\infty & \text{si } k>l \text{ et } a_k \text{ du signe contraire de } b_l. \end{cases}$$

4.3. Propriété – composition des limites.

Soit a et l désignant chacun soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Si on suppose que la limite de f en a vaut l et que g a une limite en l alors la fonction $g \circ f$ a une limite en a qui est

$$\lim_{x \to a} \; g \circ f(x) \; = \; \lim_{y \to l} \; g(y).$$

Exemple 59. Soit a un nombre réel, alors si on considère la fonction $f : x \mapsto 2x$, la limite de f en a est $2a$, et si la fonction g a une limite en $2a$ on peut écrire

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g(2x) = \lim_{x \to 2a} g(x).$$

De même, dans ce cas la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, et si la fonction h a une limite en $+\infty$ on peut écrire

$$\lim_{x \to +\infty} h \circ f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(2x) = \lim_{x \to +\infty} h(x).$$

Exemple 60. On peut par exemple retrouver la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

à partir de la limite

$$\lim_{x \to 0} \tfrac{ln(1+x)}{x} \; = \; 1$$

4.4. Propriété – lien avec les suites.

On désigne par l soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soit (x_n) une suite qui tend vers l, si on suppose que f a une limite en l, alors la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers la limite de f en l :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{y \to l} f(y).$$

Exemple 61. En se rappelant que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ on peut obtenir

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} n \tan\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi$$

ce qui permet de calculer le périmètre du cercle.

4.5. Théorème − des gendarmes.

On désigne par a soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$ et I un intervalle ouvert qui contient a (dans le cas où a est un nombre réel) ou de la forme $]b,+\infty[$ (si $a=+\infty$) ou de la forme $]-\infty,b[$ (si $a=-\infty$). On considère trois fonctions numériques f, g et h pour lesquelles

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si f et h ont la même limite en a, alors g a pour limite en a cette valeur commune :

$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; \lim_{x\to a} g(x) \;=\; \lim_{x\to a} h(x)$$

Exemple 62. On peut ainsi calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Remarque 35. Dans le cas où $a\in\mathbb{R}$ et où on veut calculer la limite en a par valeurs supérieures grâce au théorème des gendarmes on procède de la manière suivante : on applique le théorème des gendarmes aux restrictions $f_{|\,[a,+\infty[}$, $g_{|\,[a,+\infty[}$ et $h_{|\,[a,+\infty[}$ des fonctions f, g et h à $[a,+\infty[$, et il suffit d'appliquer ce théorème à ces nouvelles fonctions. Cela revient en fait à vérifier que

$$\forall x \in I\cap [a,+\infty[\,, \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

ce qui signifie que ces inégalités doivent être vérifiées uniquement pour les x supérieurs à a. Dans le cas où on veut calculer la limite en a par valeurs inférieures on raisonne de la même façon avec les restrictions à $]-\infty,a]$.

4.6. Théorème − Comparaison.

On désigne par a soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$ et I un intervalle ouvert qui contient a (dans ce cas où a est un nombre réel) ou de la forme $]b,+\infty[$ (si $a=+\infty$) ou de la forme $]-\infty,b[$ (si $a=-\infty$). On considère deux fonctions numériques f et g pour lesquelles

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leq g(x)$$

Si f et g ont chacun une limite en a, alors on peut écrire :

$$\lim_{x\to a} f(x) \;\leq\; \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemple 63. On applique souvent ce résultat dans le cas où on sait que $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$: on peut alors conclure que si f a une limite en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0$.

4.3 Application à l'étude des asymptotes

4.3.1 asymptote verticale en un point

Définition 40. *Soit f une fonction numérique et a un nombre réel. On dit que f a pour* **asymptote verticale la droite d'équation** $x = a$ *si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 64. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$ par valeurs supérieures ($+\infty$ en 0^+) et inférieures ($-\infty$ en 0^-).

4.3.2 asymptote en $\pm\infty$

D'un point de vue général, la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote* à la courbe représentative de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

(ou limite en $-\infty$), ce qui signifie que la courbe représentative de f se rapproche de la droite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$). On introduit aussi les notions un peu plus subtiles de *direction asymptotique.*

Définition 41. *Soit f une fonction numérique et b un nombre réel. On dit que f a pour* **asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation** $y = b$ *si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.
De même, on dit que f a pour **asymptote horizontale en $-\infty$ la droite d'équation** $y = b$ *si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Exemple 65. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y = 0$.

Définition 42. *Soit f une fonction numérique dont la limite en $+\infty$ est $+\infty$ ou $-\infty$. On dit que f a pour* **direction asymptotique en $+\infty$ la droite d'équation** $y = 0$ *si* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
On dit que f a pour **direction asymptotique en $+\infty$ la droite d'équation** $x = 0$ *si* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.
On définit de la même manière les notions de direction asymptotique en $-\infty$

Exemple 66. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ a pour direction asymptotique en $+\infty$ la droite d'équation $y = 0$. La fonction $x \mapsto x^3$ a pour direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $x = 0$.

Définition 43. *Soit f une fonction numérique, on dit que f a pour* **asymptote en $+\infty$ la droite d'équation** $y = ax + b$ *si*

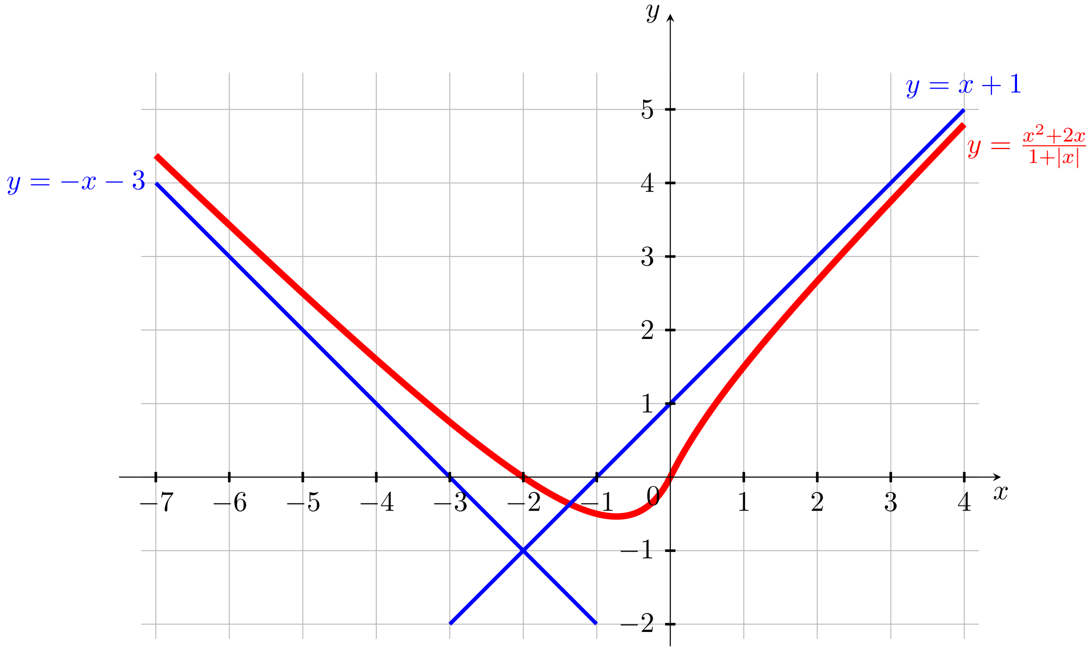
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$$

où a est un nombre réel non nul et b est nombre réel. De même, on dit que f a pour **asymptote en $-\infty$ la droite d'équation** $y = ax + b$ *si*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad et \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b$$

où a est un nombre réel non nul et b est nombre réel.

Exemple 67. La fonction $x \mapsto \frac{x^2+2x}{1+|x|}$ a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x+1$ et pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x-3$:



4.4 Continuité

Définition 44. *Soit f une fonction numérique et a un nombre réel. On dit que f est* **continue en** a *(ou* **continue au point** a*) si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est **continue sur** I *si elle est continue en tout point de I.*
Enfin on dit que f est **continue** *si elle est continue en tout point de son ensemble de définition.*

Remarque 36. Le fait que f est continue en a indique que les valeurs $f(x)$ se rapprochent de $f(a)$ lorsque x se rapproche de a.
En terme de représentation graphique, le fait que f soit continue sur un intervalle permet de tracer son graphe sur cet intervalle *"sans lever le stylo"*.

Exemple 68. Toutes les fonctions qu'on a étudiées jusqu'à maintenant, et celles qu'on étudiera par la suite, sont continues sur leur ensemble de définition, sauf la fonction partie entière :

$$x \mapsto f(x) = n \quad \text{où } n \text{ est l'entier relatif tel que } n \leq x < n+1$$

qui n'est pas continue aux points entiers relatifs (les éléments de $\mathbb{Z}$). Pour tracer le graphe de cette fonction, il faut "lever le stylo".

Exemple 69. Soit f une fonction numérique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par le procédé itératif

$$\begin{cases} x_0 \text{ fixé} \\ \text{pour tout } n \geq 0, \quad x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Si on suppose que f est continue et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite réelle l, on retrouve le fait que $f(l) = l$ (on dit que l est un point fixe de f) à partir de la définition de la continuité et de la propriété reliant les limites de fonctions aux limites de suites 4.4.

Définition 45. *Soit f une fonction numérique définie sur D_f et $a \notin D_f$ un nombre réel pour lequel f n'est pas définie. Soit l un nombre réel, on suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. On appelle* **prolongement par continuité de f en** *a la fonction g définie par*

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in D_f, \\ l & si\ x = a, \end{cases}$$

Exemple 70. Prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 71. Soit $a > 0$, on peut prolonger par continuité en 0 la fonction $x \mapsto a^x$ qui est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

On déduit des opérations sur les limites le résultat suivant :

4.7. Propriété – opérations sur les fonctions continues.

Soit f et g deux fonctions numériques et I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, alors :
- si on suppose f et g continues sur I alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continues sur I ;
- si on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I ;
- si on suppose que f est continue sur I, que l'image $f(I)$ de I par f est incluse dans J et que g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 72. La fonction logistique $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Une propriété essentielle des fonctions continues est donnée par le théorème suivant :

4.8. Théorème – Valeurs intermédiaires.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue, alors l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.

On rappelle que par définition les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles de la forme :

$$(a, b) \qquad ou \qquad]-\infty, a) \qquad ou \qquad (a, +\infty[$$

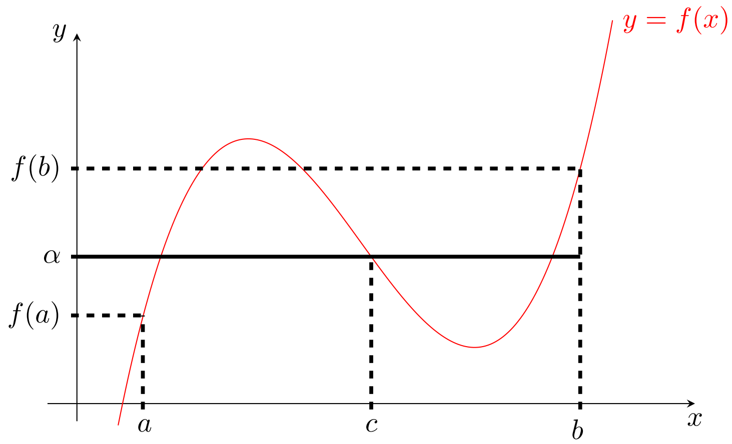
où les parenthèses peuvent être remplacées indifféremment par [et]. La propriété qui caractérise un intervalle I est alors

$$\forall a \in I,\ \forall b \in I, \qquad [a, b] \subset I$$

On applique en général le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas particulier où $I = [a, b]$:

4.9. Théorème – Valeurs intermédiaires - résolution d'équation.
Si f est continue sur le segment $[a, b]$ et si le réel α est entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un nombre c dans le segment $[a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$. Autrement dit l'équation $f(x) = \alpha$ a au moins une solution.

Graphiquement, on se trouve dans la situation suivante :



Première application : existence d'un zéro d'une fonction continue
Si f est continue sur le segment $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe alors il existe un réel c entre a et b tel que $f(c) = 0$. Un tel nombre est appelé **zéro** de la fontion f : c'est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple 73. La fonction polynôme $f : x \mapsto x^5 - 3x + 1$ s'annule entre 0 et 1.

Deuxième application : existence d'un point fixe d'une fonction continue
Si f est continue sur le segment $[a, b]$ et si on suppose que les deux images $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le segment $[a, b]$ alors il existe un réel c entre a et b tel que $f(c) = c$. Un tel nombre est appelé **point fixe** de la fontion f : c'est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 74. La fonction cosinus a un point fixe sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Troisième application : le théorème de la bijection

Définition 46. *Soit f une fonction numérique et I un intervalle, on dit que f est* **croissante** *sur I si on a*

$$\forall x \in I, \ \forall y \in I, \qquad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

On dit f est **strictement croissante** *sur I si on a*

$$\forall x \in I, \ \forall y \in I, \qquad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

On dit que f est **décroissante** *sur I si on a*

$$\forall x \in I, \ \forall y \in I, \qquad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

On dit f est **strictement décroissante** *sur I si on a*

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \qquad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

On dit que f est **strictement monotone sur** *I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.*

On a alors le théorème suivant :

4.10. Théorème – de la bijection.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Si on suppose que f est continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I sur son image $f(I)$.

Exemple 75. La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. La restriction de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ à $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Quatrième application : calcul du zéro d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe. Pour calculer une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un segment $[a,b]$, on emploie classiquement les méthodes de **dichotomie** ou de la **sécante**, qui fonctionnent sur le modèle suivant :

1. on choisit une précision $p > 0$
2. on définit $c = a$
3. tant que $|f(c)| > p$ on répète les opérations :
   - on définit un nouveau point c dans l'intervalle ouvert $]a,b[$,
   - si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signe différent on redéfinit $b = c$,
   - si $f(a)$ et $f(c)$ sont de même signe on redéfinit $a = c$
4. on renvoie la valeur c.

La valeur c obtenue est alors une solution de $f(x) = 0$ à la précision p près, puisqu'on a

$$-p \leq f(c) \leq p$$

La difficulté se trouve dans la définition du nouveau point c à chaque étape :

- dans la méthode de la dichotomie, on choisit pour c le milieu de a et b, c'est-à-dire $c = \frac{a+b}{2}$.
- dans la méthode de la sécante, à chaque étape on remplace f par la corde entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, ce qui donne
$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$$

Exemple 76. On cherche une solution de $x^2 = 2$ avec la précision 0,1 dans le segment $[1,2]$.

4.5 Dérivée

Soit f une fonction numérique, et x_0 et x_1 deux réels auxquels f est définie. L'équation de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ est

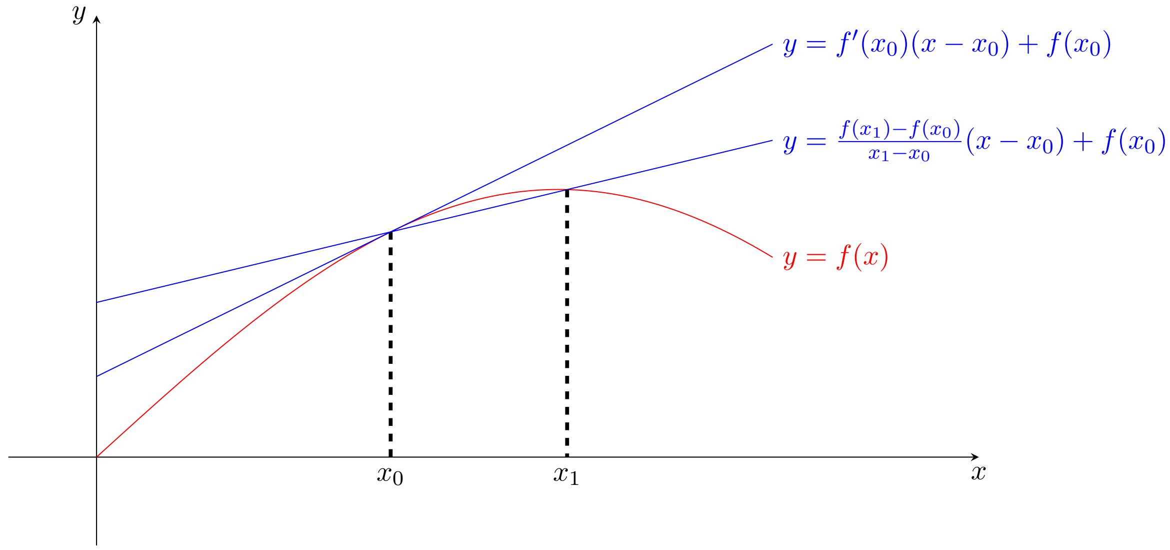
$$y \; = \; \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

dont le coefficient directeur est $\frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_0}$: ce nombre est appelé **quotient différentiel de f entre x_0 et x_1**.

Définition 47. *On dit que f est* **dérivable en** x_0 *si le quotient différentiel de f entre x_0 et x a une limite lorsque x tend vers x_0. Dans ce cas, cette limite est appelée* **dérivée de f en** x_0*, qu'on note $f'(x_0)$, et on peut écrire :*

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si A est un ensemble, on dit que f est **dérivable sur** *A si f est dérivable en tout point de A.*
On dit que f est **dérivable** *si f est dérivable en tout point de son domaine de définition : dans ce cas sa* **fonction dérivée** *est la fonction notée f' qui à tout point x_0 du domaine de définition de f associe le nombre $f'(x_0)$.*



4.11. Propriété– Equation de la tangente.

Si f est dérivable en x_0, alors l'équation de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$y \;=\; f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque 37. Puisque

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

on voit que l'équation de la tangente est la limite de celle de l'équation de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. En particulier, si la fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.

Exemple 77. Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf :

- la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

- la fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (tous les réels sauf 0) de dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour les autres fonctions usuelles, les dérivées à connaitre sont :

- pour tout entier n strictement positif, la dérivée de $f : x \mapsto x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ avec la convention $x^0 = 1$.
- pour tout entier n strictement positif, la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est $f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- pour tout nombre a non nul, la dérivée de $f : x \mapsto x^a$ est $f'(x) = ax^{a-1}$, qui est définie pour $x > 0$.
- la dérivée de $f : x \mapsto e^x$ est $f'(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- la dérivée de $f : x \mapsto \ln(x)$ est $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
- la dérivée de $f : x \mapsto \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- la dérivée de $f : x \mapsto \sin(x)$ est $f'(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- la dérivée de $f : x \mapsto \tan(x)$ est $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

4.12. Propriété– Autre écriture de la dérivée comme limite.

Si f est dérivable en x_0, alors on peut écrire la limite définissant la dérivée sous la forme suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Exemple 78. On retrouve grâce à la formule (1) ci-dessus les limites classiques :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = 1 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

4.13. Théorème– Règles de calcul des dérivées.

Si les deux fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I alors pour tout $x \in I$ on peut calculer :

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- si $a \in \mathbb{R}$ alors $(af)'(x) = af'(x)$
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- si f ne s'annule pas sur I alors $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$
- si g ne s'annule pas sur I alors $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$

Exemple 79. On calcule la dérivée de $x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
Pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ on calculera les dérivées de $f + g, fg$ et $\frac{f}{g}$.

Exemple 80. On peut calculer les dérivées des fonctions des examens de janvier et juin 2012 :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}; \qquad f(x) = \frac{2}{1+e^x}$$

4.14. Théorème– Composée et réciproque.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si la fonction f est dérivable sur I et la fonction g est dérivable sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$
- Si la fonction f est bijective de I sur $f(I)$, si elle est dérivable sur I et si sa dérivée ne s'annule pas, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et pour tout $y \in f(I)$ on a
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right))}$$

Exemple 81. On peut appliquer les règles ci-dessus aux exemples suivants ;

- Retrouver la dérivée de $x \mapsto e^x$ en considérant l'exponentielle comme fonction réciproque du logarithme népérien.
- Pour $a \neq 0$, obtenir que la dérivée de la fonction puissance $f : x \mapsto x^a$ est $f'(x) = ax^{a-1}$ pour tout $x > 0$.
- retrouver la limite classique :

$$\text{pour } \alpha \neq 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

4.15. Théorème– Règle de l'Hôpital.

Soit f et g deux fonctions telle que la limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée ($\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Alors si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (soit un nombre réel, soit $+\infty$ soit $-\infty$) on peut écrire

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 82. On retrouve grâce à la règle de l'Hôpital la limite : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

4.6 Application de la dérivée à l'étude des fonctions

4.6.1 Monotonie

On a le résultat fondamental suivant :

4.16. Théorème– Dérivée et monotonie.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est positive ou nulle sur I. Autrement dit :

$$\text{"}\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]\text{"} \quad \Leftrightarrow \quad \text{"}\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0\text{"}$$

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I. En particulier :

$$\text{"}\forall x \in I,\ f'(x) > 0\text{"} \quad \Rightarrow \quad \text{"}\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]\text{"}$$

- f est décroissante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est négative ou nulle sur I.
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement décroissante sur I.
- f est constante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est nulle sur I.

Exemple 83. Les fonctions ln et exp sont strictement croissantes sur leur ensemble de définition. En effet, on a

$$\text{pour tout réel } x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ donc ln est strictement croissante sur }]0, +\infty[,$$

et

$$\text{pour tout réel } x,\ \exp'(x) = \exp(x) = e^x > 0 \text{ donc exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

Remarque 38. Attention, les hypothèse du Théorème 4.16 sont précises, et il doit être utilisé avec précision : en particulier, le fait que les résultats sont énoncés sur un intervalle est important. Par exemple, si on considère la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, alors il ne faut pas oublier que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle : c'est la réunion des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Si on dérive cette fonction, on obtient que sa dérivée, pour tout réel x non nul, est

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Cette dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, donc f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, mais elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ (si f était strictement décroissante on devrait avoir $f(-1) > f(1)$).

Le théorème 4.16 permet de retrouver le résultat suivant :

4.17. Propriété – Composition et monotonie.

Soit f et g deux fonctions numériques dérivables. On suppose que f est définie sur un intervalle I.
Dans le cas où g est définie et croissante sur $f(I)$, alors
- si f est croissante sur I alors la composée $g \circ f$ est croissante sur I
- si f est décroissante sur I alors la composée $g \circ f$ est décroissante sur I

Dans le cas où g est définie et décroissante sur $f(I)$, alors
- si f est croissante sur I alors la composée $g \circ f$ est décroissante sur I
- si f est décroissante sur I alors la composée $g \circ f$ est croissante sur I

Esquisse de preuve. On peut en fait démontrer ce résultat de deux façons. On le fait par exemple dans le cas suivant : g est croissante et f est décroissante.
Première méthode. On regarde directement si $g \circ f$ est décroissante en prenant deux éléments x et y de I tels que $x \leq y$: comme f est décroissante on a $f(x) \geq f(y)$, et comme g est croissante cela donne $g(f(x)) \geq g(f(y))$, et donc $g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$. Puisque cela est valable pour tous les choix $x \leq y$ cela indique que $g \circ f$ est décroissante.
Deuxième méthode. On sait que la dérivée de $g \circ f$ sur I est donnée pour tout x par

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

et comme g est croissante sa dérivée g' est positive, f est décroissante donc sa dérivée f' est négative, et on en déduit que la dérivée de $g \circ f$ est négative et donc la fonction $g \circ f$ est décroissante. $\square$

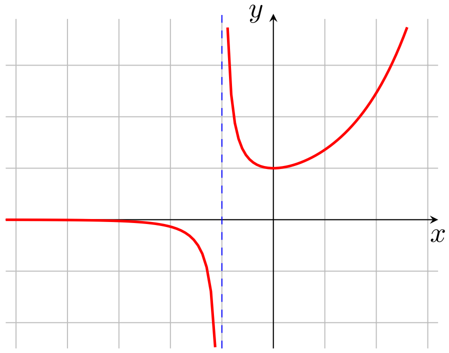
Exemple 84. On note P la pression d'un gaz et T sa température. Si on sait que la fonction $\ln(P)$ est une fonction croissante de T, alors comme la fonction exp est croissante on en déduit que $\exp\circ\ln(P) = e^{\ln(P)} = P$ (car exp est la réciproque de ln) est une fonction croissante de T.

4.6.2 Tableau de variations

Puisque le signe de la dérivée de f permet de connaitre le sens de variations de la fonction f sur les intervalles, une première partie de l'étude d'une fonction f consiste à calculer sa dérivée f' et à étudier son signe : on en déduit les intervalles sur lesquels f' est positive ou négative, et par conséquent les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante. On rassemble ces informations dans un tableau de variations, dans lequel on indique :
- le signe de la dérivée f' (indiqué par $+$ ou $-$),
- le sens de variations de la fonction f ("croissant" et "décroissant" étant symbolisés par les flèches $\nearrow$ et $\searrow$),
- les valeurs de f au(x) point(s) où la dérivée f' s'annule,
- les limites éventuelles en $-\infty$, $+\infty$ et en les points où f n'est pas définie.

Exemple 85. Pour la fonction f définie pour x dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ on a $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ et on obtient le tableau de variations :

	$-\infty$			-1			0		$+\infty$
f'		$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
	0			$\|\|$	$+\infty$				$+\infty$
f		$\searrow$		$\|\|$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\infty$	$\|\|$			1		



4.6.3 Recherche des extrema locaux

Définition 48. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, c un réel dans I et f une fonction numérique. On dit que f atteint son* **minimum sur** *I au point c si $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I$; dans ce cas le minimum de f sur I vaut $f(c)$. On dit que f atteint son* **maximum sur** *I au point c si $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I$; dans ce cas le maximum de f sur I vaut $f(c)$.*
Lorsque l'intervalle I est égal à l'ensemble de définition de f, on parle de **minimum global** *de f, ou de* **maximum global** *selon le cas. Lorsque l'intervalle I est strictement inclus dans l'ensemble de définition de f, on parle de* **minimum local** *de f, ou de* **maximum local**.
Le terme **extremum** *(au pluriel extrema) recouvre toutes les notions ci-dessus.*

La propriété suivante se voit directement sur le tableau de variations :

4.18. Propriété – Extrema locaux et dérivée.

Si f atteint un minimum ou un maximum local en c sur l'intervalle $]a, b[$ (donc avec $a < c < b$) et si f est dérivable en c alors on a $f'(c) = 0$.
En particulier, la tangente au graphe de f au point $(c, f(c))$ a pour pente $f'(c) = 0$: c'est donc une droite horizontale.

En effet, sur le tableau de variations on voit qu'un minimum local correspond au cas où la dérivée change de signe et s'annule en c : un peu avant c la dérivée est négative (donc la fonction est décroissante un peu avant c) et un peu après c la dérivée est positive (donc la fonction est croissante un peu après c). Le cas d'un maximum local est similaire : là aussi la dérivée s'annule, mais elle est positive avant c et négative après.

Exemple 86. Dans l'exemple 85 ci-dessus, la fonction f atteint son minimum sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ au point $x = 0$, qui vaut $f(0) = 1$. Par contre elle atteint des valeurs strictement négatives sur $]-\infty, -1[$: le point $x = 0$ est donc un point où f atteint un minimum local et pas global. D'ailleurs cette fonction n'a pas de minimum (ni de maximum) global sur $\mathbb{R}$.

Exemple 87. La fonction exponentielle n'a ni minimum ni maximum global sur $\mathbb{R}$.

La propriété 4.18 est importante puisqu'elle indique que si on cherche les points où f atteint son minimum ou son maximum dans un intervalle $]a, b[$ il suffit de calculer les solutions de $f'(x) = 0$: en effet le(s) point(s) où f atteint un minimum ou un maximum local (s'il y en a) se trouvera parmi les solutions de $f'(x) = 0$.

Exemple 88. Si on étudie la fonction sin sur $[0, 2\pi]$ alors on voit que sa dérivée $\sin'(x) = \cos(x)$ s'annule aux points $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Les changements de signe de la dérivée et le tableau de variations :

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin' = \cos$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				0
$\sin$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				-1		

indiquent que sin atteint son minimum sur $[0, 2\pi]$ en $\frac{3\pi}{2}$ et son maximum en $\frac{\pi}{2}$.

4.6.4 Convexité, concavité, points d'inflexion

On a déjà vu que si f est dérivable en x_0 alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

et ainsi le graphe de f se rapproche de cette droite autour du point $(x_0, f(x_0))$. Pour tracer plus précisément le graphe de f, on se pose la question de savoir de quel côté de cette tangente se trouve le graphe de f près du point $(x_0, f(x_0))$: au-dessus, au-dessous, ou alternativement l'un puis l'autre ? C'est l'une des raisons pour introduire les notions suivantes :

Définition 49. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on dit que f est* **convexe sur** *I si sa dérivée est croissante sur I.*
On dit que f est **concave sur** *I si sa dérivée est décroissante sur I.*

Remarque 39. Puisque la dérivée de $-f$ est $(-f)' = -f'$, et puisque la fonction f' est croissante si et seulement si $-f'$ est décroissante, on en déduit que f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si $-f$ est concave sur cet intervalle.

Cette notion nous intéresse particulièrement en raison de la propriété suivante :

4.19. Propriété – Convexité / concavité et position graphe / tangente.

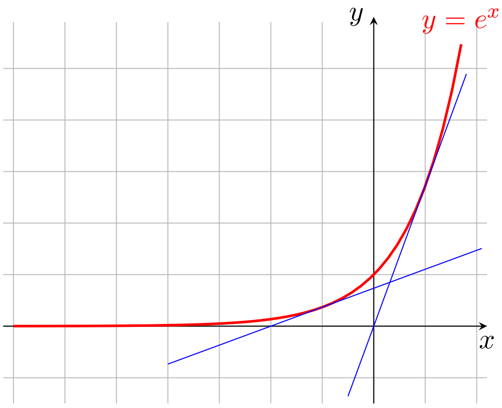
Soit f une fonction numérique dérivable sur I alors
- si f est convexe sur I, alors le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I,
- si f est concave sur I, alors le graphe de f est au-dessous de toutes ses tangentes sur I.

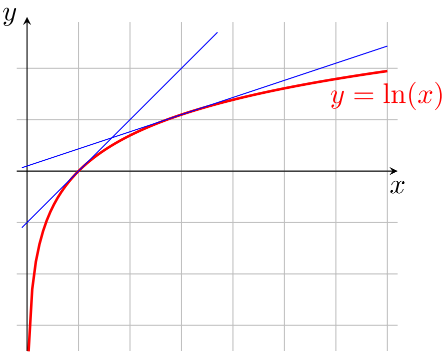
Preuve. On étudie uniquement le cas où f est convexe. Pour démontrer que le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle I, on choisit un point x_0 dans I, on remarque que la tangente au graphe au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et le graphe est au-dessus de cette tangente si et seulement si la fonction $g(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$ est positive sur I. En dérivant g, on trouve $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ et, comme la fonction f est convexe, sa dérivée f' est croissante et donc le tableau de variations de g est

		x_0	
$g'(x) = f'(x) - f(x_0)$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$
g		0	

On déduit de ce tableau que la fonction g est bien positive sur I, et donc le graphe de la fonction f est au-dessus de sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$: comme cela est vrai pour tous les points x_0 dans I, le graphe de f est bien au-dessus de toutes ses tangentes sur I. $\square$

Exemple 89. La fonction exponentielle $\exp : x \mapsto e^x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est égale à sa dérivée $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$, et comme cette fonction est croissante on en déduit que exp est convexe : son graphe est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a pour dérivée la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$: cette fonction est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc la fonction ln est concave sur cet intervalle, et son graphe est au-dessous de toutes ses tangentes. On a alors les tracés :





Pour savoir si une fonction f est convexe ou concave sur un intervalle I, il suffit d'étudier le sens de variations de sa dérivée f' : pour cela il suffit de calculer la dérivée de f' et d'étudier son signe. On introduit donc la notion suivante :

Définition 50. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, si sa dérivée f' est dérivable sur I on dit que f* **est deux fois dérivable sur** *I. On note alors f'' la dérivée de f', et on l'appelle* **dérivée seconde de** *f sur I.*

La propriété suivante se déduit directement des définitions ci-dessus.

4.20. Propriété – Convexité / concavité et dérivée seconde.

Si f est deux fois dérivable sur I alors

- f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I,
- f est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est négative sur I.

Exemple 90. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et a pour dérivée et dérivée seconde sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x \qquad \textit{et} \qquad f''(x) = 2$$

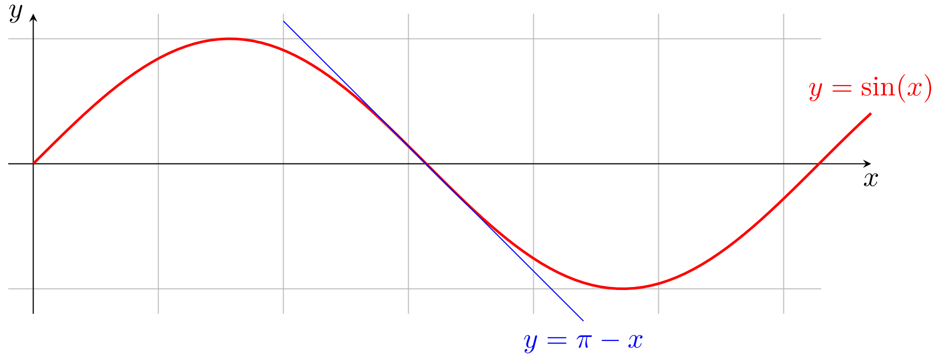
Puisque sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

En un point x_0 où la dérivée seconde f'' d'une fonction f change de signe, le graphe de cette fonction traverse sa tangente. Par exemple si f'' est positive avant x_0 alors f est convexe avant x_0

et donc son graphe est au-dessus de ses tangentes, et si f'' est négative après x_0 alors f est concave après x_0 et son graphe est au-dessous de ses tangentes : dans ce cas, le graphe de f est au-dessus de sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$ avant x_0 et au-dessous après, donc il "traverse" sa tangente en ce point. On donne un nom particulier à ce type de points :

Définition 51. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, un point x_0 de I est appelé* **point d'inflexion de** f *si sa dérivée seconde f'' change de signe au point x_0.*

Exemple 91. Si on considère la fonction sinus $\sin : x \mapsto \sin(x)$ alors elle est deux fois dérivable sur $[0, 2\pi]$ et sa dérivée seconde est $\sin''(x) = -\sin(x)$ qui change de signe en π : sur $[0, \pi]$ la dérivée seconde $-\sin$ est négative et donc $\sin$ est concave, et sur $[\pi, 2\pi]$ cette dérivée seconde est positive et donc $\sin$ est convexe. Au point $x_0 = \pi$, la tangente de $\sin$ est $y = (-1) * (x - \pi) + 0$ et le graphe de $\sin$ passe donc de au-dessous de sa tangente à au-dessus :



4.6.5 Tracé du graphe d'une fonction

En vue de tracer le graphe d'une fonction numérique f, on procède selon les étapes suivantes :

- on détermine le domaine de définition de f ;
- on calcule les limites de f aux bords de son domaine de définition ;
- on étudie les asymptotes éventuelles de f en $-\infty$ et $+\infty$;
- on calcule la dérivée f' et on donne le tableau de variations de f, en faisant apparaitre les extrema (locaux et/ou globaux) ;
- on calcule la dérivée seconde f'', on étudie son signe pour déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave, et on trouve les points d'inflexion.
- enfin pour tracer le graphe de f on reporte les asymptotes, les directions asymptotiques, les tangentes horizontales aux points où f atteint un extremum et les tangentes aux points d'inflexion : on a alors suffisamment d'indications pour tracer l'allure du graphe.

On traitera de manière étendue en cours le cas de la fonction Gaussienne $f : x \mapsto e^{-x^2}$, pour obtenir le graphe suivant :