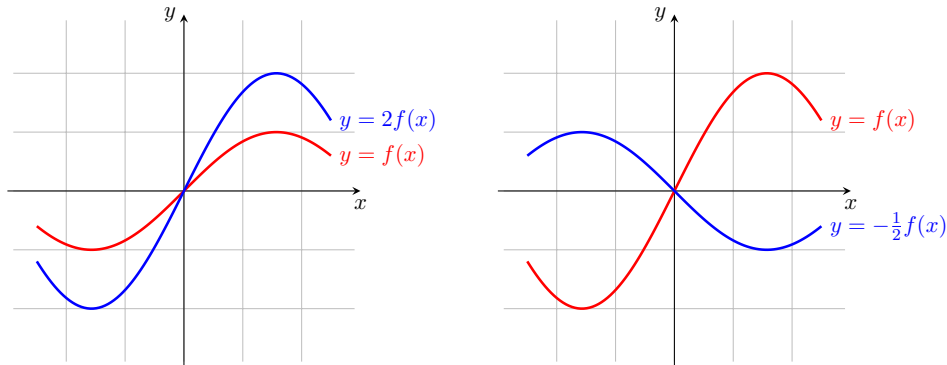
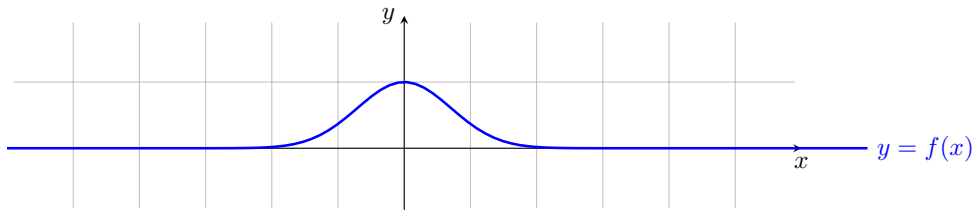


2.12. Propriété – Dilatation ou contraction verticale.

Soit a un nombre réel fixé non nul et f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Le graphe de la fonction $g : x \mapsto g(x) = a f(x)$ définie sur $D_g = D_f$ s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe y des ordonnées d'un facteur a lorsque $a > 0$. Lorsque $a < 0$, il s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur $|a|$ après une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



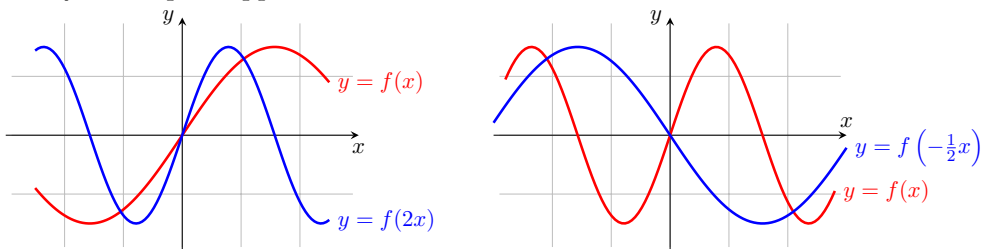
Exercice 9. On rappelle que la fonction gaussienne est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{-x^2}$:



Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto 2f(x)$ et $x \mapsto -f(x)$.

2.13. Propriété – Dilatation ou contraction horizontale.

Soit a un nombre réel fixé non nul et f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Le graphe de la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(ax)$ définie sur $D_g = \{\frac{x}{a} : x \in \mathcal{D}_f\}$ s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe x des abscisses d'un facteur $\frac{1}{a}$ lorsque $a > 0$. Lorsque $a < 0$, il s'obtient par contraction ou dilatation du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur $\frac{1}{|a|}$ après une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



Exercice 10. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x) - 2$ pour la fonction gaussienne. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto f(-\frac{x}{2})$ pour la fonction inverse (deux méthodes).

Pour certaines fonctions les transformations précédentes aboutissent au même graphe. C'est par exemple le cas des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, dont le graphe ne change pas par translation horizontale.

On a aussi le cas des fonctions paires et impaires :

Définition 25 (Parité). Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, on dit que

- f est une fonction **paire** si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = f(x)$;
- f est une fonction **impaire** si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = -f(x)$.

2.14. Propriété – Graphe des fonctions paires et impaires.

Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe y des ordonnées.

Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

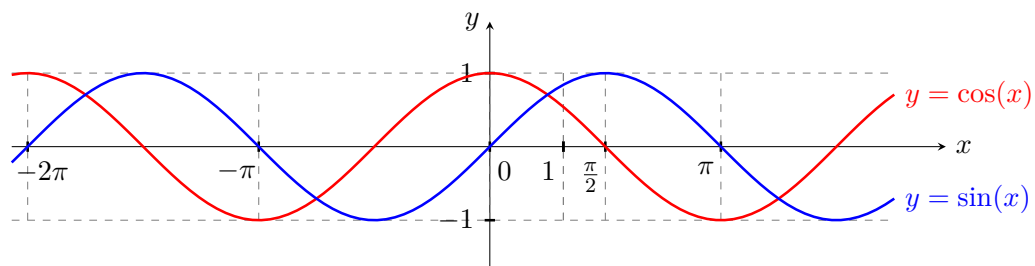
Exemple 35. Lorsque l'entier n est pair la fonction $x \mapsto x^n$ est paire, lorsque n est impair la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire. La fonction inverse est impaire.

2.7 Fonctions circulaires

Définition 26. Le **cercle trigonométrique**, ou **cercle unité**, est le cercle centré en l'origine (point de coordonnées $(0,0)$) et de rayon 1 dans un repère orthonormé.

Définition 27. Les fonctions **cosinus**, notée $\cos$, et **sinus**, notée $\sin$, sont définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante. Etant donné un nombre réel x , on construit le point M du cercle trigonométrique obtenu en parcourant le cercle trigonométrique dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) à partir du point $(1,0)$ sur une distance x si $x \geq 0$, et dans le sens inverse sur une distance $|x|$ si $x < 0$. La valeur $\cos(x)$ est alors l'abscisse de M , et $\sin(x)$ est son ordonnée.

Les graphes de ces fonctions sont :



Remarque 24. Grâce au théorème de Pythagore on trouve que pour tout réel x on a

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

et on peut ainsi calculer les valeurs suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

A noter que $\frac{\pi}{6}$ correspond à 30 degrés (radians), $\frac{\pi}{4}$ correspond à 45 degrés et $\frac{\pi}{3}$ correspond à 60 degrés.