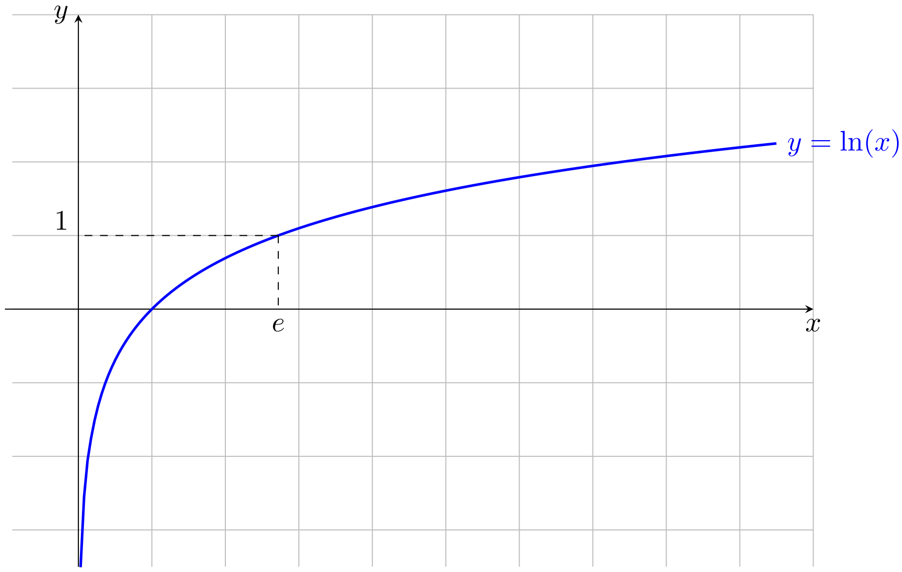
2.4 Logarithme Népérien et fonction exponentielle

Définition 20 (Logarithme Népérien)**.** *On appelle* **Logarithme Népérien***, noté* ln*, l'unique fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ *qui vaut* 0 *en* $x = 1$ *et dont la dérivée sur* $]0, +\infty[$ *est la fonction inverse* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *:*

$$\ln(1) = 0 \quad \textit{et} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \textit{ pour tout } x > 0$$

Le graphe de la fonction ln est :



2.3. Propriété – Logarithme Népérien.

- La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- Il existe un unique réel e tel que $\ln(e) = 1$, et $e \simeq 2,72$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

- Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(a^n) = n\,\ln(a)$$

  et en particulier

$$\ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

Exercice 6. Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

$$\ln(e^2); \quad \ln(1000); \quad \ln(24) - \ln(8); \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

La fonction Logarithme Népérien est le logarithme le plus couramment utilisé en mathématiques, en raison de l'expression simple de sa dérivée, cependant en sciences on utilise souvent le Logarithme en base 2 (principalement en informatique) et le Logarithme en base 10 (sciences physiques). Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

Définition 21 (Logarithme en base a)**.** *Soit $a \neq 1$ un nombre réel strictement positif fixé. On appelle* **Logarithme en base** a*, noté* $\log_a$*, la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\log_a : x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Exemple 26. Ainsi le Logarithme en base 2 est la fonction $\log_2 : x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Le Logarithme en base 10 est la fonction $\log_{10} : x \mapsto \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, elle est aussi parfois simplement notée log.

Le Logarithme en base a a les mêmes propriétés que le Logarithme Népérien :

2.4. Propriété – Logarithme en base a.

- La fonction $\log_a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- On a :

$$log_a(1) = 0 \quad et \quad \log_a(a) = 1$$

- Pour tous réels $c > 0$ et $d > 0$:

$$\log_a(c\,d) = \log_a(c) + \log_a(d),$$

$$\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d).$$

- Pour tout réel $c > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_a(c^n) = n\,\log_a(c)$$

et en particulier

$$\log_a(c^{-1}) = \log_a\left(\frac{1}{c}\right) = -\ln(c)$$

Exemple 27. Simplifier :

a) $\log_2(4) - \log_2(2)$ b) $\log_2(8) - \log_2(0,5)$ c) $\log_2(1) + \log_{10}(1) + \log_{10}(10)$

La principale raison d'employer cette fonction est la propriété suivante

2.5. Propriété – Logarithme en base a bis.

— Pour tout réel $c > 0$ on a

$$\log_a(a\,c) \;=\; \log_a(c) + 1$$

— On suppose que $a > 1$. Dans ce cas, pour tout réel $c > 0$ on a :

n est la partie entière de $\log_a(c)$ (c'est-à-dire $n \leq \log_a(c) < n+1$) si et seulement si

$$a^n \leq c < a^{n+1}$$

Exemple 28. Dans le cas du Logarithme en base 10, c'est-à-dire $a = 10$, on obtient

$$\log_{10}(10\,c) \;=\; \log_{10}(c) + 1,$$

et la partie entière de $\log_{10}(c)$ est le nombre entier n tel que

$$10^n \leq c < 10^{n+1}$$

ou autrement dit tel que c est dans l'intervalle $[10^n, 10^{n+1}[$: cet intervalle contient tous les nombres qui s'écrivent (en écriture décimale, qui est l'écriture usuelle des nombres) avec $n+1$ chiffres au-dessus de la virgule.

Exemple 29. Le pH d'une solution est donné par la formule

$$pH = -\log_{10}([H^+])$$

où $[H^+]$ est la concentration en ions $[H_3O^+]$. Lorsque le pH d'une solution augmente de 1 unité, cela signifie que la concentration $[H^+]$ a été divisée par 10. De plus, lorsque le pH vaut 7 (ce qui correspond au pH neutre) cela signifie que la concentration $[H^+]$ est égale à 10^{-7} (en $mol \cdot l^{-1}$).

Définition 22 (Exponentielle)**.** *La* **fonction exponentielle***, notée* exp*, est l'unique fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *qui vaut* 1 *en* $x = 0$ *et qui est égale à sa dérivée sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\exp(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \exp'(x) = \exp(x) \textit{ pour tout réel } x$$

2.6. Propriété – Fonction exponentielle.

- La fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln : c'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, et

$$\text{pour tout } x,\ \ln(\exp(x)) = x \quad \textit{et} \quad \text{pour tout } x > 0,\ \exp(\ln(x)) = x.$$

- En particulier $\exp(1) = e$.
- Pour tous réels a et b :

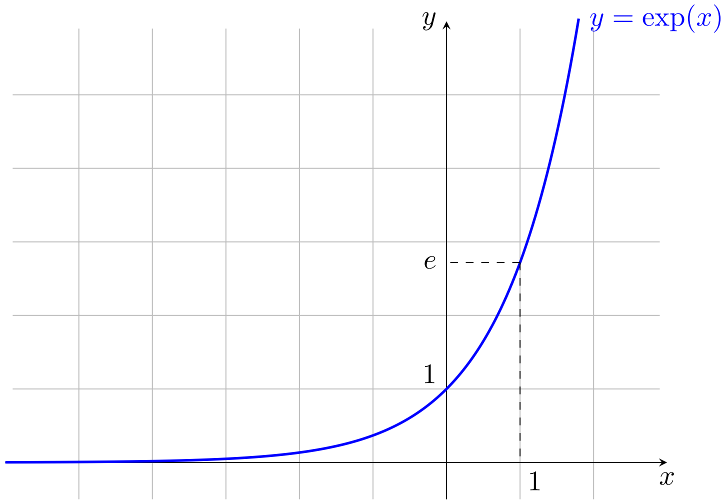
$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b),$$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}, \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

- Pour tout réel a et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(n\,a) = \exp(a)^n$$

Puisque exp est la fonction réciproque de la fonction ln, son graphe est le symétrique de celui de ln par rapport à la droite d'équation $y = x$:



Exemple 30. Calculs de $\exp(2x)$, $\exp(x^2)$ et $\exp(2\ln(2))$ (deux méthodes pour ce dernier).

Notation 9. *Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b on pose*

$$a^b = \exp(b\,\ln(a)).$$

Puisque $\ln(e) = 1$*, cela permet de donner une autre notation pour la fonction exponentielle :*

$$\textit{pour tout réel } x, \qquad \exp(x) = e^x.$$

Remarque 20. Cette notation est bien compatible avec celle des fonctions puissances, au sens que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n > 0$ on a

$$x^n = \exp(n \ln(x)) = e^{n \ln(x)} = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n\,fois}.$$

Exemple 31. Calcul de x^2, 2^x et $x^{\frac{1}{2}}$.

2.7. Propriété – Racine n-ième.

Pour tout entier $n > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par

$$x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{n}\ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}_+$, autrement dit c'est la fonction racine n-ième :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$