Définition 14 (Restriction d'une fonction)**.** *Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, on appelle* **restriction de f à A** *la fonction notée $f_{|A}$ définie sur $\mathcal{D}_{f_{|A}} = A$ par $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.*

Exemple 22. Expression de la restriction de la fonction valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ à l'ensemble des nombres réels négatifs $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

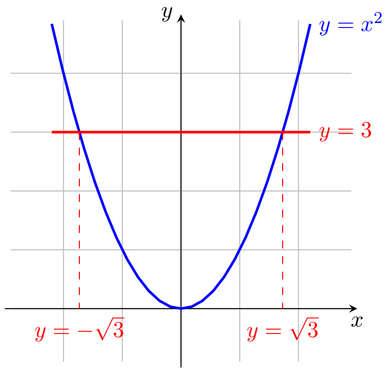
2.2 Graphe d'une fonction numérique – définition

Définition 15 (Graphe d'une fonction)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, on appelle* **graphe** *de f (ou* **courbe représentative de** *f) l'ensemble des points $(x, f(x))$ du plan dont l'abscisse x est un élément de $\mathcal{D}_f$ et l'ordonnée est l'image $f(x)$ de x par f. Cet ensemble est en général noté $graph(f)$ ou $\mathcal{C}_f$:*

$$graph(f) = \{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}_f\}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée **équation cartésienne** *du graphe (ou de la courbe représentative) de f.*

Remarque 18. On peut facilement lire l'image d'un réel ainsi que ses antécédents à partir du graphe de la fonction. En particulier, le(s) antécédent(s) d'un réel z par f sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = z$ avec le graphe de f qui a pour équation $y = f(x)$:



Exemple 23 (Puissance entière)**.** Soit n un entier naturel non nul. La fonction "puissance n-ième" est la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$. Tracé des graphes dans les cas $n = 2$, $n = 3$, n pair et n impair grands.

Exemple 24 (Fonction inverse)**.** Tracé du graphe de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2.3 Réciproque, composition des fonctions

Définition 16 (Réciproque)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$.*

— *Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, alors* **l'image directe de A par f** *est l'ensemble noté $f(A)$ regroupant toutes les images $f(x)$ des éléments x de A :*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

— *Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors* **l'image réciproque de B par f** *est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ regroupant tous les antécédents des éléments y de B :*

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

Exercice 4. — Donner les images directe et réciproque de l'ensemble $[1, 2]$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
— Donner les images directe et réciproque de l'ensemble $[0, 2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 19. La notation f^{-1} ne définit pas une fonction numérique : mathématiquement, c'est une application de l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de l'ensemble $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Par exemple, $f^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des antécédents du nombre 0 par f, qui peut être vide ou avoir un ou plusieurs éléments.

Définition 17 (Composée de fonctions)**.** *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. La* **fonction composée de f par** *g est la fonction numérique notée $g \circ f$ (on lit "g rond f") définie sur $f^{-1}(\mathcal{D}_g)$ par $g \circ f\colon x \mapsto g(f(x))$:*

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\mathcal{D}_g) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & \mathcal{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Exercice 5. Déterminer les fontions $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants :
— $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$ définies sur $\mathbb{R}$.
— $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2\,x$ définies sur $\mathbb{R}$.
— $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 18 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. On note A une partie de $\mathcal{D}_f$ et B une partie de $\mathbb{R}$.*

— *On dit que f est* **injective sur** *A si les images par f de deux éléments distincts $x \neq x'$ de A sont distinctes : $f(x) \neq f(x')$.*
On dit que f est **injective** *si elle est injective sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.*

— *On dit que f est* **surjective dans** *B si tout élément y de B a au moins un antécédent x par f, c'est-à-dire que pour tout élément y de B il existe x tel que $f(x) = y$.*

— *On dit que f est* **bijective de A dans B** *si elle est à la fois injective sur A et surjective dans B.*

2.1. Propriété – Injectivité et bijectivité.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, A une partie de $\mathcal{D}_f$ et B une partie de $\mathbb{R}$.
La fonction f est injective sur A si et seulement si tout réel y au plus un antécédent par f dans A.
La fonction f est surjective dans B si et seulement si tout réel y de B a au moins un antécédent par f.
La fonction f est bijective de A dans B si et seulement si tout élément y de B a exactement un antécédent dans A.

Exemple 25. A partir de son graphe, on voit que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais est injective sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, elle est surjective dans $\mathbb{R}_+$, et donc bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. De même, la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 19 (Fonction réciproque)**.** *Si f est bijective de $\mathcal{D}_f$ sur son image $f(\mathcal{D}_f)$ alors le procédé qui à tout élément y de $f(\mathcal{D}_f)$ associe son unique antécédent x par f définit une fonction numérique qu'on note f^{-1} et qui est appelée* **fonction réciproque** *ou* **inverse** *de f.*

2.2. Propriété – Fonction réciproque.

Lorsque f est bijective sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, le graphe de sa fonction réciproque est le symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$.
De plus, on sait que pour tout élément x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f on a

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

et pour tout élément x de l'ensemble de définition $f(\mathcal{D}_f)$ de f^{-1} on a

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}((x)) = x.$$

Exemple 26. Fonction réciproque de la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 20. Le graphe de la fonction réciproque de f s'obtient en prenant le symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$.