

1.4 Quantificateurs logiques

Définition 9. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x . Le **quantificateur universel**, noté \forall , permet de former la proposition “ $\forall x \in X, P(x)$ ” qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de X , et qui est fausse si $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de X .

Remarque 10. “ $\forall x \in X, P(x)$ ” se lit “pour tout x dans X la proposition $P(x)$ est vérifiée”, ou “tout élément x de X vérifie P ” ou “quel que soit x dans X la proposition $P(x)$ est vérifiée”.

Définition 10. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x . Le **quantificateur existentiel**, noté \exists , permet de former la proposition “ $\exists x \in X, P(x)$ ” qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de X , et qui est fausse si $P(x)$ est fausse pour tous les éléments de X .

Remarque 11. “ $\exists x \in X, P(x)$ ” se lit “il existe x dans X tel que la proposition $P(x)$ est vérifiée”, ou “il existe x dans X qui vérifie P ”.

Exemple 10. On considère la proposition $P(x) = "x \geq 0"$. Alors la proposition “ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ” est fausse et la proposition “ $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ” est vraie.

1.3. Propriété– Négation des quantificateurs.

Soit une proposition P , alors on a les équivalences logiques :

$$\begin{aligned} \text{non}(\forall x \in X, P(x)) &\equiv \exists x \in X, \text{non}(P(x)), \\ \text{non}(\exists x \in X, P(x)) &\equiv \forall x \in X, \text{non}(P(x)). \end{aligned}$$

Exemple 11. La proposition “ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ” est fausse et sa négation “ $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$ ” est vraie.

Exemple 12. La négation de “toutes les pommes du panier sont vertes” est “il y a une pomme dans le panier qui n’est pas verte” : la négation de “Tous (...)” n’est pas “Aucun (...)” mais plutôt “Il existe au moins un pour lequel on n’a pas (...)”.

Exercice 1 (examen deuxième session 2013). On considère la proposition : “si tous les insectes ont six pattes alors les araignées ne sont pas des insectes”. Écrire la contraposée et la négation de cette proposition.

Remarque 12. Par convention, la proposition “ $\forall x \in \emptyset, P(x)$ ” est toujours vraie (il n’y a rien à vérifier puisque l’ensemble vide n’a pas d’éléments) et la proposition “ $\exists x \in \emptyset, P(x)$ ” est toujours fausse (il n’existe aucun élément dans l’ensemble vide)

1.4. Propriété— Utilisation des quantificateurs.

Soit une proposition $P(x, y)$ dépendant de deux variables, alors on a les équivalences logiques :

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x, y) \equiv \forall y \in Y, \forall x \in X, P(x, y)$$

$$\exists x \in X, \exists y \in Y, P(x, y) \equiv \exists y \in Y, \exists x \in X, P(x, y)$$

Remarque 13. Par contre, la proposition “ $\forall x \in X, \exists y \in Y, P(x, y)$ ” signifie que pour tout x il existe une valeur y (qui dépend a priori de x) telle que $P(x, y)$ est vérifiée, alors que “ $\exists y \in Y, \forall x \in X, P(x, y)$ ” signifie qu’il existe une valeur de y telle que $P(x, y)$ est vérifiée pour toutes les valeurs de x dans X .

Exemple 13. Rappel sur les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} . On considère les deux propositions “ $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y = x + 1$ ” et “ $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, y = x + 1$ ”. Que dire par ailleurs de la proposition “ $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y = x + 1$ ” ?

1.5 Techniques de démonstration

1.5.1 Preuve directe d’une implication.

Soit P et Q deux propositions données. Démontrer l’implication “ $P \Rightarrow Q$ ” consiste à vérifier / démontrer que cette implication est vraie. La **preuve directe** de l’implication $P \Rightarrow Q$ consiste à supposer que P est vraie et à démontrer (par un raisonnement déductif) que Q est vraie : dans ce cas cela montre que l’implication $P \Rightarrow Q$ est vraie (rappelons que quand P est fausse cette implication est de toute manière vraie).

Exemple 14. On démontre par preuve directe que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$ l’implication suivante est vérifiée :

$$k \text{ est impair} \Rightarrow k^2 \text{ est impair}$$

1.5.2 Preuve par contraposée d’une implication.

Soit P et Q deux propositions données. **Démontrer** l’implication “ $P \Rightarrow Q$ ” **par la contraposée** (ou par contraposition) consiste à démontrer que sa contraposée $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ est vraie (pour cela, on emploie la preuve directe). Rappelons qu’une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes, donc elle sont vraies (ou fausses) simultanément : en ce sens il revient au même de démontrer l’une ou l’autre.

Exemple 15. On démontre par la contraposée que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$ l’implication suivante est vérifiée :

$$k^2 \text{ est pair} \Rightarrow k \text{ est pair}$$

1.5.3 Preuve par l'absurde.

Soit P une proposition. La **démonstration par l'absurde** de P consiste à supposer que P est fausse et à en déduire une absurdité, une contradiction.

Exemple 16. La preuve classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, qui remonte à Euclide, est une preuve par l'absurde.