Remarque 6. Lorsque l'implication "$P \Rightarrow Q$" est vraie et que P est vraie, on peut en déduire que Q est vraie : ce fait est à la base de nombreux syllogismes. Par contre lorsque l'implication "$P \Rightarrow Q$" est vraie et que Q est vraie on ne peut rien en déduire sur la vérité de P. Par exemple, la proposition "(1=0) $\Rightarrow$ (0=0)" est vraie et $0 = 0$ est vraie mais $1 = 0$ est fausse.

Exemple 6. Le postulat de Descartes, "je pense donc je suis", peut se réécrire "je pense $\Rightarrow$ je suis".

Définition 7. **L'équivalence** *des deux propositions P et Q est la propostion notée $P \Leftrightarrow Q$ qui est vraie quand les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses, et qui est fausse dans les autres cas.*

Remarque 7. La notation $P \Leftrightarrow Q$ se lit "P et Q sont équivalentes", "P équivaut à Q", "P si et seulement si Q" ou encore "P est une condition nécessaire et suffisante pour Q".

La table de vérité de l'équivalence est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 7. La proposition "(1=1) $\Leftrightarrow$ (0=0)" est vraie, la proposition "(1=0) $\Leftrightarrow$ (2=0)" est vraie, par contre la proposition "(1=0) $\Leftrightarrow$ (0=0)" est fausse.

Exemple 8. Illustration de l'emploi de l'équivalence de deux propositions pour la résolution du sytème suivant par la méthode du pivot de Gaus :

$$\begin{cases} x - y - z & = & 3 \\ 2x + 3y + 2z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & 0 \end{cases}$$

Cette résolution se fait en écrivant des systèmes équivalents, obtenus par transformation selon la méthode du pivot de Gauss : à chaque étape on choisit une ligne parmi celles non encore utilisées, on choisit un pivot dans cette ligne, qu'on élimine des autres lignes nen encore utilisées (par substitution ou addition de lignes) et on recommence jusqu'à obtenir un système triangulaire. On résoud alors le système triangulaire et on vérifie qu'on a vraiment trouvé une solution en revenant au système initial.

1.3 Equivalence logique

Définition 8. *Deux propositions P et Q sont* **logiquement équivalentes** *si P est vraie lorsque Q est vraie, et si P est fausse lorsque Q est fausse. Cette relation est notée $P \equiv Q$.*

1.1. Propriété– Caractérisation de l'équivalence logique.

Deux propositions P et Q sont logiquement équivalentes si et seulement si elles ont la même table de vérité.

Remarque 8. L'équivalence logique de deux propositions P et Q est une relation entre ces deux propositions : cela ne forme pas une nouvelle proposition (comme l'équivalence vue plus haut).

1.2. Propriété– Equivalences logiques usuelles.

Soit trois propositions P, Q et R, alors les propositions suivantes son logiquement équivalentes :

a) Double négation : $non(non(P)) \quad \equiv \quad P$

b) $non(P\, et\, Q) \quad \equiv \quad non(P)\, ou\, non(Q)$

c) $non(P\, ou\, Q) \quad \equiv \quad non(P)\, et\, non(Q)$

d) $P\, et\, (Q\, ou\, R) \quad \equiv \quad (P\, et\, Q)\, ou\, (P\, et\, R)$

e) $P\, ou\, (Q\, et\, R) \quad \equiv \quad (P\, ou\, Q)\, et\, (P\, ou\, R)$

f) L'équivalence est une double implication :

$$P \Leftrightarrow Q \quad \equiv \quad (P \Rightarrow Q)\, et\, (Q \Rightarrow P)$$

g) Autre définition de l'implication :

$$P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad non(P)\, ou\, Q$$

h) Contraposée :

$$P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad non(Q) \Rightarrow non(P)$$

i) $non(P \Rightarrow Q) \quad \equiv \quad P\, et\, non(Q)$.

Exemple 9. On traite les exemples suivants : “non(k est un multiple de 2 et k est un multiple de 3)”, “non(fromage et dessert)”, “non(je me tais ou je vais au tableau)”. Contraposée et négation des implications : “si je me suis rasé le matin alors j'ai l'air réveillé”, “si on veut (alors) on peut”, “(k^2 est impair) $\Rightarrow$ (k est impair)”.

Remarque 9. La contraposée (point *h)* ci-dessus) est donc une réécriture de l'implication : elle permet parfois de simplifier l'énoncé, par exemple : la contraposée de “(k^2 est impair) $\Rightarrow$ (k est impair)” est “(k est pair) $\Rightarrow$ (k^2 est pair)”. Elle exprime aussi le fait suivant : dire que “P est une condition suffisante pour Q” (c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$) est logiquement équivalent à dire que “$non(P)$ est une condition nécessaire pour $non(Q)$” (c'est-à-dire $non(Q) \Rightarrow non(P)$).