Comme conséquence de la propriété 5.2 on déduit les propriétés suivantes de l'intégrale :

5.3. Propriété – Linéarité de l'intégrale.

Soit $a < b$ et soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$, alors :

- pour tout nombre réel α fixé on a
$$\int_a^b \alpha\, f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$
- de plus
$$\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Remarque 41. Par exemple, pour calculer l'aire signée de la région du plan entre les graphes de f et g, il suffit de calculer la différence des aires :

$$\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b [f(t) - g(t)]dt.$$

5.2 Primitive d'une fonction continue

D'après ce qui précède, si une fonction f est continue sur un intervalle I et si a est un élément de I, alors pour tout x dans I le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$ si $x \leq a$) est contenu dans I et la fonction f est continue sur $[a, x]$, on peut donc calculer l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$. Cela permet ainsi de définir une nouvelle fonction F sur I par la formule

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On a alors le résultat suivant :

5.4. Théorème– Intégrale et primitive.

Si f est continue sur l'intervalle I, alors la fonction F définie sur I par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée est $F'(x) = f(x)$.

Esquisse de démonstration dans le cas où f est croissante sur I. Soit x dans I, alors pour démontrer que $F'(x) = f(x)$ on doit vérifier que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Pour cela, on doit vérifier que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

On démontre seulement que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Soit $h>0$, d'après la relation de Chasles, on a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Si f est croissante alors $f(x)\leq f(t)\leq f(x+h)$ pour tout t dans $[x,x+h]$ et donc la valeur moyenne $\dfrac{1}{(x+h)-x}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ est aussi entre ces deux valeurs :

$$f(x)\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x+h)$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, le théorème des gendarmes implique que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$, ce qui termine la démonstration dans ce cas. $\square$

Exemple 95. Soit α un nombre réel, on considère la fonction constante égale à α sur $\mathbb{R}$: $f(x)=\alpha$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Soit a un nombre réel, si on définit la fonction $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \alpha\, dt = \alpha(x-a)$$

et donc on a bien $F'(x)=\alpha=f(x)$ pour tout réel x

A partir de ce résultat, on définit la notion de primitive ;

Définition 53. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, une fonction F définie sur I est une* **primitive de** f **sur** I *si F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $F'=f$.*

Le lien entre primitive et intégrale est résumé dans le théorème suivant ;

5.5. Théorème– Intégrale et primitive.

Si f est continue sur l'intervalle I et si a est dans I, alors l'unique primitive F de f qui est définie sur I et qui s'annule au point a est la fonction

$$F : x\mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Toute autre primitive de f s'écrit alors sous la forme

$$x\mapsto \int_a^x f(t)dt + c$$

où c est un nombre réel fixé.

Notation 14. *Par abus de notation, on note souvent $\displaystyle\int f$ ou $\displaystyle\int f(x)dx$ pour désigner une primitive de f. En particulier, l'expression $\displaystyle\int g(t)dt = G(x)$ signifie que G est une primitive de g, ou autrement dit que g est la dérivée de G, c'est-à-dire $G'=g$.*

Exemple 96. Les primitives classiques suivantes sont à connaitre :

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pour } a \neq -1 & \text{et} & \displaystyle\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ pour } \alpha \neq -1 \\
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) \text{ sur }]0,+\infty[& \text{et} & \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) \text{ si } f \text{ est positive} \\
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) \text{ sur }]-\infty,0[& \text{et} & \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(-f(x)) \text{ si } f \text{ est négative} \\
\displaystyle\int e^x\,dx = e^x & \text{et} & \displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} \\
\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) & \text{et} & \displaystyle\int \sin(f(x))f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) \\
\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) & \text{et} & \displaystyle\int \cos(f(x))f'(x)\,dx = \sin(f(x))
\end{array}$$

En particulier, la première règle s'applique avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et on obtient :

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x}$$

en se souvenant que $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Remarque : en lisant ces primitives *à rebours*, on retrouve les règles pour dériver : par exemple comme une primitive de $e^{f(x)}f'(x)$ est $e^{f(x)}$, on en conclut que la dérivée de $e^{f(x)}$ est $e^{f(x)}f'(x)$.

Exemple 97. Pour $\alpha = 2$, l'exemple ci-dessus indique que $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$, et donc la primitive de x^2 qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,dt$. De même la primitive de x^2 qui s'annule en 1 est $x \mapsto \displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ et par la relation de Chasles on a

$$\int_1^x t^2\,dt = \int_1^0 t^2\,dt + \int_0^x t^2\,dt = \int_0^x t^2\,dt + c$$

avec $c = \displaystyle\int_1^0 t^2\,dt$.

5.3 Calcul d'intégrale

Le calcul d'une intégrale, comme on l'a vu précédent, peut avoir pour intérêt de calculer une primitive, ce qui est une de ses applications principales, surtout dans la résolution des Equations Différentielles. Une autre raison peut être tout simplement d'évaluer l'intégrale pour elle-même. C'est par exemple le cas lorsqu'on calcule l'intégrale d'une dérivée : si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et que sa dérivée f' est continue, alors f est une primitive de f'... En particulier, si a est un point dans I, alors f est la primitive de f' qui prend la valeur $f(a)$ au point a, et on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

pour tout x dans I. La relation ci-dessus est la **formule fondamentale du calcul différentiel**. En général, on la réécrit en utilisant la notation

$$[f]_a^x = f(x) - f(a)$$

ce qui donne le résultat ;

5.6. Théorème – Formule fondamentale du calcul différentiel.

Soit f une fonction dont la dérivée est continue sur le segment $[a, b]$, alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = [f]_a^b = f(b) - f(a)$$

Exemple 98. On considère un objet ponctuel qui se déplace sur la droite des réels. Sa position à l'instant t est le nombre $x(t)$. Si on connait le point de départ $x(0)$ à l'instant $t = 0$ de cet objet ponctuel ainsi que sa vitesse $v(t)$ pour tout instant t, on sait que cette vitesse est la dérivée de sa position et donc $x'(t) = v(t)$ pour tout t. En particulier, la position de l'objet à l'instant $t = 1$ est

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t)dt = x(0) + \int_0^1 x'(t)dt$$

Pour calculer une intégrale, en plus de la formule fondamentale du calcul différentiel et des formules de primitives, on a l'outil suivant ;

5.7. Théorème – Intégration par parties.

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables sur le segment $[a, b]$, alors on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)g(t)dt &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt \end{aligned}$$

Exemple 99. Par exemple, si on a $f(x) = x^2$ et $g(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$ et donc pour $a = 1$ et $b = 2$ on a

$$\begin{aligned} \int_1^2 2t\ln(t)dt &= \left[t^2\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 t^2\frac{1}{t}dt \\ &= 2^2\ln(2) - 1^2\ln(1) - \int_1^2 tdt = 4\ln(2) - 0 - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 \\ &= 4\ln(2) - \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = 4\ln(2) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$